

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Национальный исследовательский университет  
«Московский институт электронной техники»

---

На правах рукописи

Лысенко Александр Юрьевич

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ  
ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОФОТОННОЙ ЭМИССИОННОЙ  
КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ В РАССЕЙВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Специальность: 1.3.2. «Приборы и методы экспериментальной физики»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
Селищев Сергей Васильевич

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
Терещенко Сергей Андреевич

Москва – 2021 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений.....	1
Введение .....	5
Глава 1. Методы коррекции влияния рассеяния излучения на качество реконструкции.....	12
1.1. Однофотонная эмиссионная компьютерная томография .....	12
1.2. Методы реконструкции в ОФЭКТ .....	19
1.3. Методы коррекции влияния рассеяния излучения в ОФЭКТ .....	29
1.4. Выводы .....	37
Глава 2. ОФЭКТ в среде со свойством "рассеяние прямо назад" .....	38
2.1. Уравнение переноса излучения для чисто поглощающей среды .....	38
2.2. Уравнение переноса излучения для однородной рассеивающей среды со свойством "рассеяния прямо назад" .....	43
2.3. Методы моделирования проекций в ОФЭКТ .....	53
2.4. Выводы .....	56
Глава 3. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ при аналитическом вычислении проекций.....	57
3.1. Программа аналитического моделирования прохождения излучения через вещество в среде со свойством "рассеяние прямо назад" .....	57
3.2. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ на основе аналитического моделирования проекций.....	66
3.3. Итерационный метод коррекции влияния геометрического ослабления в ОФЭКТ .....	71
3.4. Выводы .....	84
Глава 4. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ на основе моделирования проекций методом Монте-Карло .....	86

4.1. Ядерно-физическая система Geant4 для моделирования прохождения излучения через вещество в эмиссионной томографии методом Монте-Карло .....	86
4.2. Программный пакет Geant4 Application for Tomographic Emission (GATE) .....	88
4.3. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ на основе моделирования проекций методом Монте-Карло .....	97
4.4. Выводы .....	115
Заключение.....	117
Список литературы.....	119

## Список сокращений

ART – algebraic reconstruction technique.

MAP – maximum a posteriori.

МАРЕМ – maximum a posteriori expectation maximization.

MLEM – maximum likelihood expectation maximization.

OSEM – ordered-subsets expectation maximization.

OSL – one step late.

НМ – новый метод.

ОФЭКТ – однофотонная эмиссионная компьютерная томография.

ОЭПР – обратное экспоненциальное преобразование Радона.

ПЧД – позиционно-чувствительный детектор.

ПЭТ – позитронно-эмиссионная томография.

РПН – "рассеяние прямо назад".

РПН-среда – среда со свойством "рассеяние прямо назад".

РФП – радиофармпрепарат.

ТМ – традиционный метод.

УПИ – уравнение переноса излучения.

ФОП – фильтрованные обратные проекции.

ФШЛ – фантом Шеппа-Логана.

ФЭУ – фотоэлектронный умножитель.

ЧПС – чисто поглощающая среда.

ЭПР – экспоненциальное преобразование Радона.

## Введение

### Актуальность работы

Эмиссионная томография применяется для исследования внутренней структуры и состояния конденсированных сред. Однофотонная эмиссионная компьютерная томография (ОФЭКТ) осуществляет реконструкцию пространственных распределений источников излучения, существующих естественно или созданных искусственно. ОФЭКТ является эффективным и распространённым методом функциональной диагностики в ядерной физике и медицине.

Реконструкция пространственных распределений источников излучения в рассеивающей среде является актуальной задачей, не решённой к настоящему времени. Основные трудности при этом заключаются в учёте процессов взаимодействия излучения с веществом на пути от источника до детектора. Основными среди этих процессов являются поглощение и рассеяние излучения.

Одним из выдающихся достижений в этом направлении была разработка однофотонной эмиссионной компьютерной томографии, которая позволила учесть процесс поглощения излучения за счёт открытия экспоненциального преобразования Радона (ЭПР). Математический аппарат обратного экспоненциального преобразования Радона (ОЭПР) лежит в основе работы современных однофотонных эмиссионных томографов. Этот метод является традиционным методом реконструкции в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии.

Вообще говоря, процесс томографической реконструкции состоит из двух этапов. На первом этапе устанавливается связь между исследуемым распределением источников излучения и показаниями детектора на границе объекта. Эта связь устанавливается путём решения уравнения переноса излучения (УПИ), описывающего взаимодействие излучения с веществом (так называемая, прямая задача). При учёте только поглощения излучения

предполагается, что среда, через которую проходит излучение, является чисто поглощающей средой (ЧПС). Для такой среды УПИ имеет точное аналитическое решение в общем случае.

На втором этапе реконструируется пространственное распределение источников излучения с помощью решения обратной томографической задачи, преобразующей измеренные в специальной геометрической схеме измерений данные, формирующие ЭПР, в эмиссионную томограмму. В случае ЧПС это сводится к ОЭПР.

В то же время, проблема учёта рассеяния излучения остаётся открытой. В большинстве случаев применения ОФЭКТ доля зарегистрированных рассеянных фотонов достигает 30-40 процентов. В результате проекционные данные становятся размытыми. Размытие проекционных данных приводит к ухудшению контрастности реконструированного изображения, что, в свою очередь, усложняет процесс интерпретации результатов.

УПИ, учитывающее как поглощение, так и рассеяние излучения, является интегро-дифференциальным и не имеет точного аналитического решения в общем случае. Поэтому попытки учёта рассеяния излучения сводились к тем или иным приближениям, упрощающим УПИ. Простейшим таким приближением можно считать представление реальной среды в виде ЧПС. Однако при этом полностью игнорируется процесс рассеяния излучения. Частично влияние рассеяния можно учесть, сделав предположение о том, что рассеянные гамма-кванты никогда не попадут на детектор. Это предположение сводит рассеивающую среду к числу поглощающей с заменой коэффициента поглощения на коэффициент ослабления. Однако, поскольку рассеянные гамма-кванты всё-таки достигают детектора, задача учёта рассеяния излучения остаётся актуальной.

В основу диссертационной работы положено приближение о рассеивающей среде со специальным видом индикатрисы рассеяния, описывающей свойство "рассеяние прямо назад" (РПН-среда). В РПН-среде любой гамма-квант в каждом акте рассеяния меняет направление своего

движения на прямо противоположное. Такое предположение позволяет перейти от интегро-дифференциального УПИ к дифференциальному уравнению в частных производных. В этом случае, так же, как и для приближения чисто поглощающей среды, удаётся получить точное аналитическое решение уравнения переноса излучения в общем случае и для точных граничных условий. Более того, это позволяет получить и точное решение обратной томографической задачи. На основе точных решений прямой и обратной задачи разработан новый метод реконструкции эмиссионных томограмм.

Однако, поскольку реальная среда не является средой со свойством "рассеяние прямо назад", представляет интерес исследование эффективности применения понятия РПН-среды для реконструкции томограмм на основе измеренных данных, соответствующих реальной среде. При этом для получения измеренных данных можно провести дорогой и негибкий натуральный эксперимент или использовать численное моделирование траектории каждого гамма-кванта методом Монте-Карло. При этом можно сравнить точность реконструкции томограмм, полученных новым методом и традиционным методом, используемым в современных томографах.

### Цель работы и задачи исследования

Цель работы – реконструкция пространственных распределений источников излучений в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии с учётом рассеяния излучения в среде.

Для достижения поставленной цели ставятся следующие задачи:

1. Получить точное аналитическое решение уравнения переноса излучения в однородной рассеивающей среде со свойством "рассеяние прямо назад".
2. Получить точное решение обратной томографической задачи для однородной рассеивающей среды со свойством "рассеяние прямо назад".
3. Разработать новый метод реконструкции эмиссионных томограмм на

основе полученных точного аналитического решения уравнения переноса излучения и соответствующего точного решения обратной томографической задачи для рассеивающей среды со свойством "рассеяние прямо назад".

4. Сравнить разработанный метод реконструкции пространственных распределений источников излучения с традиционным методом реконструкции.

5. Исследовать влияние рассеяния на точность реконструкции эмиссионных томограмм предложенным методом для различных рассеивающих сред и геометрических параметров объекта на основе проекционных данных, полученных с помощью аналитического решения уравнения переноса излучения и с помощью ядерно-физического комплекса Geant4.

#### Научная новизна результатов и выводов

1. Впервые получено точное аналитическое решение уравнения переноса излучения для однородной рассеивающей среды со свойством "рассеяние прямо назад".

2. Впервые получено точное решение обратной томографической задачи для однородной рассеивающей среды со свойством "рассеяние прямо назад".

3. Разработаны алгоритмы и программы расчёта показаний детектора для однородной рассеивающей среды с индикатрисой рассеяния "рассеяние прямо назад" и для реальной однородной среды с помощью ядерно-физического комплекса Geant4.

4. Разработаны алгоритм и программа численной реконструкции эмиссионных томограмм в однородной рассеивающей среде с учётом процесса рассеяния излучения.

5. Установлена зависимость точности реконструкции пространственных распределений источников излучения от различных веществ рассеивающих сред и геометрических параметров исследуемого объекта.



## Практическая значимость работы

1. Полученные результаты могут быть использованы в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии для улучшения точности реконструкции пространственных распределений источников излучения в рассеивающей среде.

2. Полученные результаты могут быть использованы для усовершенствования существующих алгоритмов реконструкции изображений в ОФЭКТ.

Достоверность и обоснованность научных положений, результатов и выводов

Достоверность и обоснованность результатов, положений и выводов диссертационной работы обеспечена их согласованностью с данными научных публикаций, соответствием с твёрдо установленными научными фактами, хорошей воспроизводимостью и использованием признанных методов исследования. Численное моделирование траекторий гамма-квантов в рассеивающей среде проведено с помощью открытого программного обеспечения (ядерно-физического комплекса Geant4), разрабатываемого в Европейской организации по ядерным исследованиям (ЦЕРН) более 20 лет и проходящего верифицирование каждые 5 лет.

Положения, выносимые на защиту

1. В приближении среды со свойством "рассеяние прямо назад" полученное точное аналитическое решение уравнения переноса излучения в однородной рассеивающей среде позволяет определить распределение потока фотонов от источников излучения при прохождении через рассеивающую среду.

2. Полученное точное аналитическое решение обратной томографической задачи позволяет реконструировать пространственное распределение источников излучения по пространственному распределению

потока фотонов на внешней границе (смеха однофотонной эмиссионной компьютерной томографии).

3. Разработанный метод реконструкции эмиссионных томограмм с учётом влияния рассеяния излучения позволяет уменьшить систематическую погрешность по сравнению с традиционным методом реконструкции (в зависимости от величины коэффициента рассеяния среды до трёх раз по критерию среднеквадратичного отклонения).

4. Установлено, что разработанный метод исследования пространственной структуры источников в рассеивающей среде применим для кристаллического, аморфного и жидкого состояния вещества среды.

#### Личный вклад автора

В основу диссертации легли результаты исследований, выполненных лично автором в Институте биомедицинских систем Национального исследовательского университета МИЭТ, либо в соавторстве при его непосредственном участии. Автор диссертации принимал непосредственное участие также в постановке задач в соответствии с целями исследований и обсуждении полученных результатов.

#### Апробация работы

Основные результаты исследований докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях:

1. 12th, 13th, 14th Russian-German Conference on Biomedical Engineering (Russia, Suzdal, 2016; German, Aachen 2018; Russia, Saint-Peterburg 2019);
2. 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 IEEE Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference «ElConRus» (Russia, Moscow, 2017; 2018; 2019; 2020; 2021);
3. 24, 25, 26, 27 Всероссийские межвузовские научно-технические конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика» (Россия, Москва, 2017; 2018; 2019; 2020).

Работы по теме диссертации были поддержаны грантом Министерства образования и науки Российской Федерации №14.584.21.0021 от 17.07.2017 и грантом от РФФИ «Конкурс на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре («Аспиранты»)» № 19-32-90049 от 23.08.2019.

### Публикации

Материалы диссертационной работы опубликованы в 14 печатных работах, в том числе в 6 статьях в рецензируемых журналах, включенных в перечень ВАК, а также в 8 докладах в сборниках трудов конференций.

### Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из Введения, 4 Глав и Заключения, изложена на 130 страницах и содержит 49 рисунков, 7 таблиц, и 100 библиографических ссылок.

## Глава 1. Методы коррекции влияния рассеяния излучения на качество реконструкции

### 1.1. Однофотонная эмиссионная компьютерная томография

Вычислительную (компьютерную) томографию можно разделить на два класса по типу исследуемого объекта: трансмиссионная и эмиссионная томография [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. В трансмиссионной томографии осуществляется реконструкция пространственного распределения коэффициента поглощения на основе данных, полученных при регистрации излучения, испускаемого внешним источником излучения [5, 6, 11]. В эмиссионной томографии осуществляется реконструкция пространственного распределения источников излучения [3, 4, 5]. При этом, в отличие от трансмиссионной томографии, в эмиссионной томографии реконструкция осуществляется на основе данных, полученных при регистрации исходящего из исследуемого объекта излучения.

Эмиссионная томография делится на два вида: однофотонная эмиссионная компьютерная томография (ОФЭКТ) и позитронно-эмиссионная томография (ПЭТ) [4, 5]. В ОФЭКТ производится регистрация гамма-квантов, испускаемых радиофармпрепаратом (РФП), в молекулах которого содержатся стабильные нуклиды, некоторые из которых заменены на нестабильные радионуклиды. В ПЭТ производится регистрация гамма-квантов, полученных в результате аннигиляции позитронов от РФП и электронов внутри объекта.

ОФЭКТ применяется во многих медицинских областях. Так, в онкологии ОФЭКТ используется для определения степени прогрессии онкологических заболеваний, в области нейровизуализации используется для определения деменции, эпилепсии, травм головы и закупорки кровеносных сосудов. В кардиологии с помощью ОФЭКТ выявляют проблемы с кровяным давлением и исследуется приток крови к сердцу. Кроме этого, ОФЭКТ используется для диагностики эндокринных заболеваний, адренкортикальных расстройств,

болезней, связанных с опорно-двигательным аппаратом, инфекций и воспалений [12, 13].

Процедура проведения исследования с помощью ОФЭКТ выглядит следующим образом: сначала пациенту вводят радиофармпрепарат, который испускает меченные гамма-кванты. Введение РФП осуществляется с помощью ингаляции или посредством инъекции. Затем введённый РФП распространяется по телу человека с помощью крови. После этого пациента помещают в томограф, который регистрирует испускаемое из него излучение с помощью системы детектирования, вращающейся вокруг пациента. По полученным данным осуществляется реконструкция пространственного распределения источников излучения внутри пациента [4, 5, 14]. Внешний вид ОФЭКТ-томографа представлен на рисунке 1.1.



Рис. 1.1. Внешний вид ОФЭКТ-томографа  
(рисунок взят из общедоступных источников)

По своим видам ОФЭКТ-томографы делятся на несколько категорий. Наиболее распространёнными являются многоцелевые однофотонные эмиссионные компьютерные томографы. Такая модель имеет одну или несколько головок детекторов, каждая из которых крепится к специальному креплению, называемого гантри. Другим видом являются гибридные томографы, которые одновременно включают в себя два томографа, например,

один трансмиссионный, а другой эмиссионный. С помощью трансмиссионного томографа собирается информация об распределении коэффициента поглощения внутри пациента, которая в дальнейшем используется эмиссионным томографом для более точной реконструкции пространственного распределения источников излучения [3, 13, 15].

Помимо многоцелевых томографов, существуют и томографы, предназначенные для специальных целей. Примером таких томографов может послужить томограф для кардиологических исследований. Такие томографы отличаются тем, что они занимают гораздо меньше места и имеют меньший вес. В результате стоимость таких томографов гораздо меньше многофункциональных и гибридных томографов. Однако при работе с таким томографом может возникнуть проблема с неполным захватом окружающих сердце тканей [2].

Обычно ОФЭКТ-томограф состоит из коллиматора и сцинтиллятора (или гамма-камеры, с обратной стороны которой располагаются фотоэлектронные умножителями (ФЭУ)). Вместе они образуют элемент, называемый детекторной сборкой. Детектор в ОФЭКТ отвечает за сбор данных. Эти данные включают в себя определение координат регистрации фотона, энергии фотона и общего количества зарегистрированных фотонов. Эта информация используется в дальнейшем при реконструкции томограммы [1, 4].

Часто роль сцинтиллятора выполняет гамма-камера (одна или несколько), которая вращается вокруг пациента во время процедуры исследования. Как правило, позиционно-чувствительные детекторы (ПЧД) гамма-камеры состоят из одного кристалла (наиболее распространён вариант кристалла из йодида натрия (NaI)), у которого с задней стороны располагается массив ФЭУ. Однако, иногда вместо одного сцинтиллятора ставятся несколько маленьких кристаллов (например, из йодида цезия (CsI)), которые образуют ПЧД. Кроме этого, бывают и твердотельные детекторы (например, из теллурида кадмия и цинка (CdZnTe)) [5].

Поскольку для точной реконструкции томограммы требуется информация о направлении траектории движения каждого из фотонов, а при прохождении фотона через вещество может произойти большое количество разных взаимодействий излучения с веществом объекта, в результате которых траектория фотона изменится, то для уменьшения угла, под которым фотон может попасть в гамма-камеру (тем самым уменьшая количество зарегистрированных рассеянных фотонов) используются коллиматоры. Коллиматоры в ОФЭКТ могут быть расположены параллельно друг другу или может использоваться схема с мультипинхольной коллимацией. Кроме этого, бывают варианты с коллиматорами, расположенными вокруг исследуемого объекта. В таком случае вместо гамма-камеры используется массив из детектирующих кристаллов, перед каждым из которых устанавливается свой коллиматор. Также существует вариант с фокусирующим коллиматором вместо коллиматора с параллельными каналами. В этом случае каналы коллиматора располагаются под углом относительно друг друга. Такой вариант позволяет придать больший вес фокусной области. Однако такой вариант коллиматоров может создавать дополнительные артефакты при реконструкции и поэтому он редко используется [3, 5].

Основными параметрами, характеризующими детектор, являются пространственное и энергетическое разрешения. Под пространственным разрешением понимается минимально возможный размер объекта, который будет хорошо виден на реконструированном изображении. Для изомера технеция  $^{99m}\text{Tc}$  пространственное разрешение кристалла составляет значение в диапазоне от 2 до 5 мм. Однако на это значение влияет как расстояние между источником излучения и детектором, так и наличие коллиматора. Небольшой коллиматор, который имеет длинные отверстия, как правило, даёт наилучший результат, однако это приводит к уменьшению чувствительности детекторов и, как следствие, к увеличению времени измерения проекций [3].

Поскольку реконструированная томограмма формируется на основе всех зарегистрированных фотонов, то в неё входят как фотоны, испытавшие

рассеяние, так и не испытавшие, то есть первоначальные. Последние называют баллистическими фотонами.

Энергетическое разрешение определяет точность определения энергии зарегистрированного фотона. Точный учёт баллистических фотонов позволяет уменьшить влияние рассеяния излучения за счёт исключения рассеянных фотонов из измеренных проекций. Таким образом, увеличение энергетического разрешения детекторов даёт улучшение точности реконструкции. Энергетическое разрешение для технеция-99м как правило составляет 10% от энергии в 140 кэВ [5].

Кроме этого, существует ещё один параметр, влияющий на точность регистрации фотонов. Этот параметр определяет минимальное время, которое необходимо гамма-камере, чтобы зарегистрировать фотон. При большом количестве фотонов, попавших в гамма-камеру за небольшой период времени, возникают проблемы с обработкой всех этих событий, в результате чего часть информации теряется. Этот параметр также иногда называют мёртвым временем детектора. Однако, данный параметр в ОФЭКТ малозначителен, в отличие от ПЭТ [3, 4].

Помимо перечисленных факторов, на точность реконструкции томограмм влияют и другие факторы. Эти факторы можно разбить на три группы: конструкция и характеристики томографа, параметры исследуемого объекта и физические взаимодействия излучения с веществом. В результате их воздействия на показания детекторов на томограмме могут образовываться артефакты, скрывающие или создающие видимость наличия патологии. Кроме этого, эти факторы уменьшают резкость и контрастность изображения, тем самым усложняя исследование объекта [1, 2, 4, 5, 16].

Перечисленные ранее факторы относятся к первой группе – конструкция и характеристики томографа. К этой группе так же относится и артефакты детекторов, когда один или несколько детекторов перестают работать и в результате точность реконструкции томограммы уменьшается [17].





Рассеяние излучения по большей части обусловлено комptonовским рассеянием – неупругое столкновением элементарных частиц с орбитальным электроном атома. В результате этого столкновения гамма-квант отдаёт часть своей энергии электрону, изменяя траекторию своего движения в соответствии с законом сохранения энергии и импульса. В результате рассеяния излучения детектор регистрирует неверную информацию о траектории движения фотона, что приводит к размытию реконструированного изображения. Кроме этого, рассеянный фотон оказывает влияние и на контрастность изображения, так как в результате детектор неправильно определяет место появления такого фотона в измеренной проекции (рис. 1.4) [19, 22].

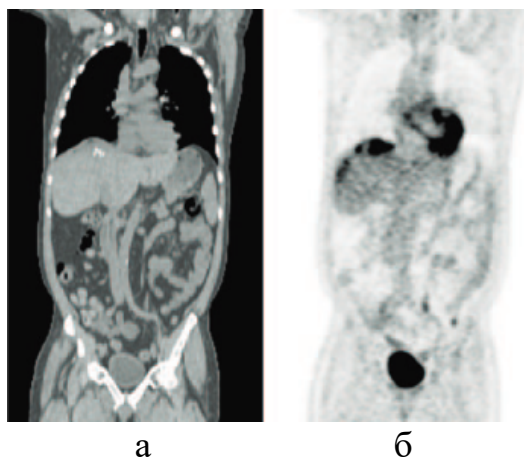


Рис. 1.3. Реконструированная томограмма с коррекцией поглощения (а) и без коррекции поглощения (б)

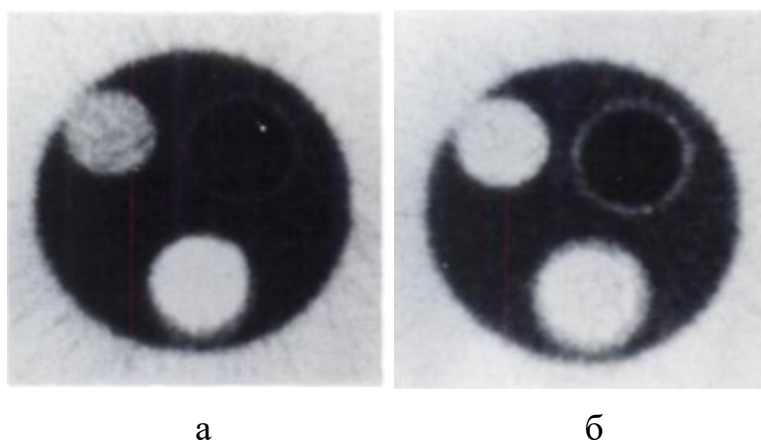


Рис. 1.4. Реконструированная томограмма без коррекции рассеяния излучения (а) и с коррекцией рассеяния излучения (б)

К артефактам коллиматоров относят способность фотонов проникать через септу (стенку) коллиматора, в итоге попадая на детектор. В данном случае результатом такого взаимодействия будет такой же эффект, как и при рассеянии фотона – детектор зарегистрирует некорректную информацию о траектории движения фотона, что приведёт к размытию и ухудшению контрастности изображения [19, 23].

Причиной эффекта частичного объёма является плохое пространственное разрешение томографа и малое количество зарегистрированных фотонов. Так как расстояние между каждым источником излучения и детектором разное, то в итоге для источников, расположенных ближе к детектору, регистрируется гораздо больше фотонов, чем для источников, которые расположены дальше. В результате эффект частичного объёма приводит к размытию реконструированной томограммы [24].

Таким образом, на показания детекторов и результат реконструкции влияет множество физических факторов. Среди всех этих факторов наиболее влиятельными являются поглощение и рассеяние излучения. Пренебрежение их влиянием приводит к усложнению процесса диагностики исследуемых объектов. Поэтому необходимо учитывать как можно больше искажающих факторов при реконструкции томограмм.

## 1.2. Методы реконструкции в ОФЭКТ

При реконструкции эмиссионных томограмм считается, что пространственное распределение источников излучения полностью погружено в исследуемый объект. Вокруг этого объекта вращается гамма-камера или позиционно-чувствительный детектор (ПЧД), который регистрирует испускаемое из объекта излучение [6, 7].

Информацию, собранную детектором за один поворот системы, называют проекциями. Проекции измеряются до тех пор, пока томограф не повернётся на 360 градусов вокруг объекта. Совокупность полученных проекций называется синограммой, где по одной оси будет угол, под которым была получена проекция, а по другой оси будет координата детектора [5].

Поскольку обычно система детектирования томографа вращается вокруг объекта, а перед кристаллами ставят коллиматоры с параллельными каналами, то такую систему измерения называют круговой, а систему получения проекций – параллельной. Также бывают варианты, когда у коллиматоров не параллельные каналы, а под углом друг к другу, образуя веерную систему получения проекций. Однако такая схема может быть приведена к параллельной схеме путём перестановки проекций внутри синограммы [5].

Обозначим через  $S(x, y)$  пространственное распределение источников излучения в неподвижной системе координат  $(x, y)$  и введём вращающуюся систему координат  $(\xi, \zeta)$ , повернутую на угол  $\theta$  относительно неподвижной системы координат. Тогда переход от неподвижной системы координат во вращающуюся можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\theta}(\xi, \zeta) &= S(x(\xi, \zeta, \theta), y(\xi, \zeta, \theta)) = \\ &= S(\xi \cos(\theta) - \zeta \sin(\theta), \xi \sin(\theta) + \zeta \cos(\theta)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тогда для угла  $\theta = 0$  градусов можно записать следующее выражение:

$$S_{\theta=0}(\xi, \zeta) = S(x, y). \quad (1.2)$$

В случае, если на показания детекторов не влияли никакие искажающие факторы, мы получим следующее выражение для проекций  $p(\xi, \theta)$ :

$$p(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\theta}(\xi, \zeta) d\zeta. \quad (1.3)$$

Это выражение называется преобразованием Радона [6]. С математической точки зрения эта формула представляет собой сумму значений  $S_{\theta}(\xi, \zeta)$  вдоль оси  $\zeta$ . Поскольку компьютеры работают с дискретной формой представления, данную формулу можно переписать в следующем матричном виде:

$$g_i = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \dots + a_{im}f_m = \sum_{j=1}^m a_{ij}f_j \quad (1.4)$$

где  $g$  – векторное представление показаний детектора (синограмма),  $f$  – векторное представление пространственного распределения источников

излучения,  $a$  – взвешенный коэффициент вклада дискретного значения изображения на показания детектора,  $i$  – номер строки матрицы,  $j$  – номер столбца матрицы.

Таким образом, задачу реконструкции томограммы можно свести к решению системы уравнений  $g = Af$  [25]. Для решения этой системы нужно найти обратное значение к  $A$ , так как  $f = A^{-1}g$ . Однако метод прямого обращения имеет ряд существенных недостатков: большое время вычисления; обратная матрица  $A^{-1}$  может не существовать; может быть найдено несколько представлений матрицы  $A^{-1}$ ; матрица  $A^{-1}$  может быть плохо обусловленной, в результате чего небольшие изменения в полученных показаниях детектора  $g$  могут привести к нахождению совершенно другого пространственного распределения источников излучения  $f$ .

В связи с этим методы реконструкции в ОФЭКТ делятся на две большие группы: аналитические и итерационные [6, 25, 26]. Аналитические методы направлены на реконструкцию пространственного распределения источников излучения путём обратного проецирования изображения [27, 28, 29, 30], в то время как итерационные методы направлены на поиск вектора  $f$  с помощью предположений о распределении источников излучения внутри объекта, а затем сравнения синограммы оценочного распределения с измеренной синограммой [31, 32, 33, 34]. На основе полученной разности происходит модификация текущего приближения, тем самым получая новое приближение. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность. Кроме этого, для итерационного улучшения результатов реконструкции могут применяться нейронные сети [35, 36, 37, 38].

К аналитическим методам реконструкции изображений можно отнести метод Фурье-преобразования, метод обратного проецирования и метод фильтрованных проекций. Метод Фурье-преобразования основан на теореме о центральном сечении. Согласно этой теореме, проекция синограммы для угла  $\theta$  даёт одно центральное сечение для преобразования Фурье от истинного объекта. Таким образом, используя обратное преобразование Фурье можно

получить реконструкцию пространственного распределения источников излучения [6].

Метод обратного проецирования заключается в использовании оператора обратного проецирования, который можно записать в следующем виде:

$$b(x, y) = \int_0^{2\pi} g(S, \theta) d\theta. \quad (1.5)$$

В этом случае проекция для каждого угла  $\theta$  переводится из вращающейся системы координат в неподвижную и затем полученный вектор записывается во все столбцы матрицы изображения. После суммирования для всех углов  $\theta$  полученное изображение делится на число проекций. Таким образом получается реконструкция пространственного распределения источников излучения. Стоит заметить, что при небольшом количестве проекций по сравнению с размером матрицы на реконструированной томограмме будут наблюдаться артефакты в виде полос. Основной проблемой этого способа является то, что оператор обратного проецирования не является методом обращения операции проецирования. Это связано с тем, что в каждый пиксель изображения мы записываем значение из столбца текущей проекции, таким образом записывая значения и в те пиксели, где источника нет. В результате получается размытое пространственное распределение источников излучения.

Для уменьшения влияния размытия в результате обратно проецирования применяется фильтрация проекций. В методе обратных фильтрованных проекций сначала производится обратное проецирование, а затем полученное изображение фильтруется с помощью аподизирующей функции (функции окна). Аподизирующая функция используется для регуляризации некорректной задачи, которая возникает из-за больших значений ядра свёртки в Фурье-образе изображения. Большие значения на больших пространственных частотах ядра свёртки могут привести к сильным отличиям между реконструированным изображением и истинным. Аподизирующая

функция добавляет вес для каждой частоты, что приводит к более точной реконструкции изображения [7].

Наиболее распространённым методом реконструкции томограмм в ОФЭКТ является метод фильтрованных обратных проекций (ФОП). Данный метод похож на метод обратных фильтрованных проекций, только в нём сначала проводится фильтрация проекций, а затем обратное проецирование. Фильтрованные проекции  $f(\xi, \theta)$  можно записать как

$$f(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi_{\theta}, \theta) h_1(\xi - \xi_{\theta}) d\xi_{\theta} \quad (1.6)$$

После фильтрации проекций также определяется операция обратного проецирования и с помощью него осуществляется нахождение реконструированного пространственного распределения источников излучения.

В качестве фильтра применяются функции на основе треугольной функции, которая записывается в следующем виде:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}, n = 0 \\ 0, n = 2, 4, 6, \dots \\ -\frac{1}{n^2 \pi^2}, n = 1, 3, 5 \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

где  $n$  – число дискрет в фильтре.

В результате фильтрации проекций амплитуда низкочастотных компонент уменьшается, что приводит к уменьшению размытия изображения за счёт сложения отрицательных и положительных значений в проекциях. Это приводит к увеличению резкости изображения для высокочастотных компонент реконструированного изображения. Но зачастую высокочастотные компоненты содержат шум, что приводит к усилению влияния шума. Этот эффект может быть уменьшен путём использования модифицированных фильтрующих функций. Примеры аподизирующих функций, которые могут быть использованы на этапе фильтрации проекций, представлены в табл. 1.1

[6, 39]. Однако, уменьшение влияния этих шумов приводит к ухудшению пространственного разрешения томограммы.

Табл. 1.1. Аподизирующие функции

Название фильтра	Формула
Фильтр Рамачандрана-Лакшминараянана	$\eta(\chi -  \chi_0 )$
Фильтр Шеппа-Логана	$\sin\left(\frac{\chi}{2\chi_0}\right) / \frac{w}{2\chi_0}$
Косинусный фильтр	$\cos\left(\frac{\chi}{2\chi_0}\right)$
Фильтр Хэмминга	$0,56 + 0,46 \cos\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)$
Фильтр Ханна	$0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)$

К итерационным алгоритмам можно отнести градиентный алгоритм, метод максимизации правдоподобия (MLEM, maximum likelihood expectation maximization) и метод максимизации апостеризации (MAP, Maximum A Posteriori) [25]. Принципом всех итерационных алгоритмов является нахождение пространственного распределения источников излучения путём получения последовательных приближений. Алгоритмы отличаются между собой способами сравнения измеренных проекций с текущим приближением.

Примером простого итерационного алгоритма является техника алгебраической реконструкции (ART, algebraic reconstruction technique). Итерационный процесс в данном случае описывается как

$$\tilde{S}_j^{k+1} = \tilde{S}_j^k + \frac{p_i - \sum_{j=1}^N f_{ji}^k}{N}, \quad (1.8)$$

где  $\tilde{S}_j^k$  и  $\tilde{S}_j^{k+1}$  текущее и следующее приближение,  $N$  – количество пикселей в изображении и  $p_i$  – показание детектора для  $i$ -ого столбца проекций. В качестве начального значения может быть использован простой объект типа "Диск" или томограмма, полученная с помощью метода фильтрованных обратных проекций.

Градиентный итерационный алгоритм основан на поиске минимального значения отклонения для разности измеренной и приближенной синограммы.



Данное минимальное значение ищется среди разности для всех пикселей изображения. Математически данный алгоритм можно записать в следующем виде:

$$\tilde{S}^{k+1} = \tilde{S}^k + \alpha^k p^k, \quad (1.9)$$

где  $\alpha^k$  – весовой коэффициент, характеризующий величину шага, а  $p^k$  – направление движения, который выбирается на основе значения локального градиента. Основным недостатком этого алгоритма является то, что он ищет локальный минимум. В результате точность реконструкции изображения зависит от выбора начальной точки [25].

Метод максимизации правдоподобия основан на пуассоновской природе вероятности радиоактивного распада вещества. Поэтому он ищет общее решение – пространственное распределение источников излучения, которое соответствует показаниям детектора. Этот поиск осуществляется на основе того факта, что вероятность распада и, как следствие, испущенных фотонов, может быть рассчитана по закону Пуассона. Формула нахождения следующего приближения в MLEM записывается в следующем виде [25]:

$$\tilde{S}^{k+1} = \frac{\tilde{S}^k}{\sum_{i=1}^n a_i} \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sum_{j=1}^m a_{ij} \tilde{S}_j^k} a_{ij}. \quad (1.10)$$

В этом методе в качестве начального приближения может быть выбрано как пространственное распределение в виде обычного диска, так и результат, полученный с помощью реконструкции методом фильтрованных обратных проекций. Однако, в случае использования метода ФОП нужно учитывать тот факт, что он может иметь отрицательные значения, а, поскольку каждое значение представляет собой произведение текущего значения на значение  $\tilde{S}$ , то очевидно, что оно не должно содержать отрицательных значений. В этом случае отрицательные значения должны быть обнулены или записаны как небольшие положительные значения.

Таким образом, метод максимизации ожидания может быть представлен как последовательный набор проекций по отношению к обратным проекциям. Для всего изображения можно интерпретировать данную формулу как

следующая итерация = текущая итерация  $\times$  нормализованное обратное проецирование от ((измеренные проекции) / (проекция изображения)).

Другими словами, на каждом шагу итерационного процесса имеется текущее приближение. Используя различные системные модели, которые могут содержать в себе ослабление излучения или размытие изображения из-за характеристик детектора, возможно посчитать, какими будут проекции для текущего приближения. Тогда можно сравнить текущие проекционные данные с вычисленными, и, используя соотношение между текущими и смоделированными показаниями проекциями, модифицировать текущее приближение. Таким образом происходит получение данных для следующего итерационного шага. Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность. Однако, скорость сходимости MLEM-алгоритма довольно низкая, и, как правило, требуется примерно 50-200 итераций, чтобы достичь приемлемого качества реконструированного изображения.

Для ускорения сходимости MLEM-алгоритма может применяться метод максимизации ожидания упорядоченных подмножеств (OSEM, ordered-subsets expectation maximization) [25]. В данном методе проекционные данные делится на подмножества или блоки. Так, если в проекциях содержатся данные для 128 ракурсов, то их можно разбить на 16 подмножеств следующим образом:

- 1 подмножество: 1, 17, 33, ..., 113.
- 2 подмножество: 2, 18, 34, ..., 114.
- ...
- 16 подмножество: 16, 32, 48, ..., 128.

При этом важно организовать подмножества таким образом, чтобы они были равномерно распределены вокруг исследуемого объекта, поскольку это

ускоряет сходимость алгоритма. После разбиения на подмножества, к каждому из подмножеств применяется MLEM-алгоритм для реконструкции изображения. Первый шаг итерации заканчивается, когда все подмножества были обработаны, то есть получены приближения первые приближения. Для случая с разбиением на 16 подмножеств время вычисления будет примерно в шестнадцать раз меньше по сравнению со стандартной реконструкцией на основе MLEM-алгоритма.

Однако томограммы, реконструированные с помощью MLEM-алгоритма, становятся всё более и более зашумлёнными с ростом числа итераций. Это связано с тем, что текущее приближение может содержать шумы, которые в результате дадут проекции, в которых также будет содержаться шум. Таким образом, критерий "приближенные проекции должны быть как можно больше похожи на измеренные проекции" не является самым лучшим критерием для получения относительно высококачественных изображений. Поэтому можно сказать, что лучшим критерием будет следующий набор правил:

- приближенные проекции должны быть как можно больше похожи на измеренные проекции;
- реконструированное изображение не должно содержать сильного шума.

Для использования этих критериев этого вводится понятие об априорном знании в качестве ограничения влияния шума. Такой способ ограничения называют регуляризацией. Регуляризация основывается на предположении о том, каким является истинное распределение источников излучения. Как правило, его выбирают так, чтобы максимально уменьшить влияние шума. Тогда главной целью алгоритма становится поиск функции  $\tilde{S}$  таким образом, чтобы оба условия критерия были максимально удовлетворены. Для этого вводится так называемый "отстающий на один шаг" (OSL, one step late) итеративный процесс, который можно записать в следующем виде [25]:

$$\tilde{S}^{k+1} = \frac{\tilde{S}^k}{\sum_{i=1}^n a_i + \beta \frac{\partial}{\partial \tilde{S}} U(\tilde{S}^k)} \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sum_{j=1}^m a_{ij} \tilde{S}_j^k} a_{ij}. \quad (1.11)$$

где  $\beta \frac{\partial}{\partial \bar{S}} U(\bar{S}^k)$  является производной от некоторой функции  $U$ . Функция  $U$  называется энергетической функцией и выбирается таким образом, чтобы максимально сгладить изображение, а  $\beta$  является коэффициентом, за счёт которого регулируется влияние этого сглаживающего фактора. Такой модифицированный метод максимизации правдоподобия называется MAPEM (Maximum A Posteriori expectation maximization) алгоритмом [25].

В качестве сглаживающей функции  $U$  может использоваться следующая квадратичная функция:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{S}} U(\bar{S}^k) = \sum_{b \in N_j} w_{jb} (\bar{S}_j^k - \bar{S}_b^k), \quad (1.12)$$

где  $N_j$  является набором пикселей вокруг  $j$ -ого пикселя. Таким образом, единственным отличием MLEM от MAPEM является наличие дополнительного слагаемого в делителе. При этом, если изображение имеет одинаковое количество зарегистрированных фотонов для одного набора пикселей в точке  $j$ , то тогда этот множитель становится равным нулю и новое значение получается равным значению MLEM-алгоритма. Если значение  $j$ -ого пикселя является больше, чем среднее значение соседних пикселей, то тогда производная энергетической функции становится больше нуля. В этом случае новое значение итерационного шага  $\bar{S}^{k+1}$  будет меньше, чем было бы для MLEM-алгоритма. Если значение  $j$ -ого пикселя в среднем меньше значений в соседних пикселях, то новое значение итерационного шага  $\bar{S}^{k+1}$  будет больше, соответственно.

Однако, поскольку значение делителя может получиться отрицательным, значение нового пикселя в реконструированной томограмме может оказаться отрицательным. Это не соответствует физическому смыслу томограммы – детектор не может зарегистрировать отрицательное количество фотонов. Чтобы избежать этой ситуации, при реконструкции стараются использовать достаточно небольшое значение коэффициента веса  $\beta$ . Кроме этого, могут

применяться подходы, которые не используют технику "отстающий на один шаг".

Второй проблемой этого подхода является сильное сглаживание в областях резкого изменения интенсивности пространственного распределения источников излучения в реконструированном изображении. В результате этого происходит размытие томограммы. Для решения этой проблемы применяются различные подходы, которые делятся на две группы в зависимости от того, есть ли доступ к информации о внутренней структуре объекта.

Если такая информация есть (например, была получена другим способом, таким как компьютерная томография или сцинтиграфия), то тогда в качестве соседних пикселей можно рассматривать лишь только те пиксели, которые принадлежат одной области. Однако, поскольку границы областей, полученных с помощью сцинтиграфии и компьютерной томографии могут различаться, то на практике как правило используются более сложные алгоритмы учёта границ.

Если информация о внутренней структуры отсутствует, то тогда можно рассматривать в качестве одной области соседние пиксели, разница между значениями которых не превышает определённое значение. Если разница между пикселями становится больше этого значения, то тогда сглаживающий член  $\frac{\partial}{\partial \tilde{s}} U(\tilde{S}^k)$  должен иметь значение как можно ближе к нулю. Это может достигаться за счёт использования нелинейной энергетической функции  $U$ . Таким образом, резкий рост в разности пикселей не будет приводить к пропорциональному росту сглаживающего члена. Другим подходом является сравнение текущего значения пикселя с медианным значением в текущем наборе пикселей [25].

### 1.3. Методы коррекции влияния рассеяния излучения в ОФЭКТ

В большинстве случаев применения ОФЭКТ в клинических исследованиях доля зарегистрированных рассеянных фотонов достигает 30-40

процентов [22, 40, 41]. В результате проекционные данные становятся размытыми. Это приводит к тому, что у реконструированного изображения уменьшается контрастность и увеличивается сложность интерпретации результатов. Различные варианты взаимодействия гамма-квантов и детектирующего блока показаны на рис. 1.5.

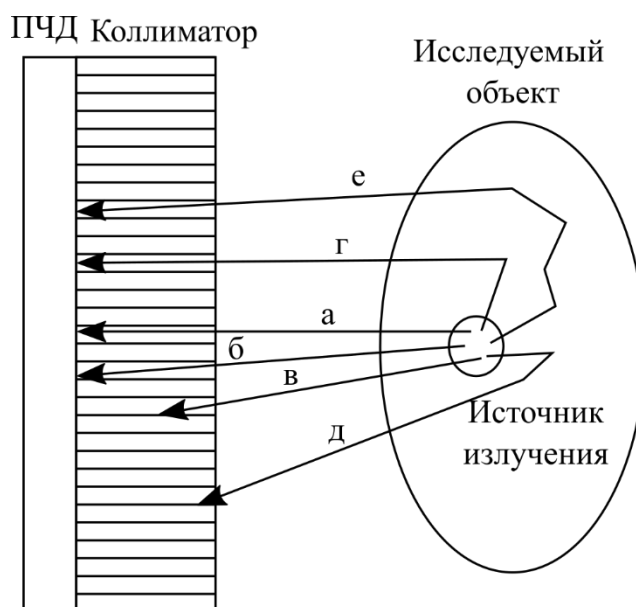


Рис. 1.5. Сечение детекторного блока и исследуемого объекта с пространственным распределением источников излучения. (а) – фотон, прошедший параллельно стенкам коллиматора и достигший детектора, (б) – фотон, прошедший через одну стенку коллиматора и достигший детектора, (в) – фотон, поглощённый стенкой коллиматора, (г) – фотон, достигший детектора после акта рассеяния, (д) – фотон, испытавший множественное рассеяние и поглощённый стенками коллиматора, (е) – фотон, испытавший множественное рассеяние и достигший детектора

В основе эффекта рассеяния излучения лежит два основных механизма взаимодействия излучения с веществом: комптоновское и рэлеевское рассеяние. В результате рассеяния фотон меняет направление своего движения. При этом энергия гамма-кванта может измениться, а может остаться прежней. Несмотря на то, что рэлеевское рассеяние излучения в тканях человека происходит гораздо чаще, чем комптоновское рассеяние (для энергии, меньшей 150 кэВ), алгоритмы учёта рассеяния излучения направлены

на коррекцию влияния фотонов, испытавших комптоновское рассеяние. Это связано с тем, что угол отклонения гамма-квантов после рэлеевского рассеяния мал и такие фотоны практически неотличимы от баллистических [19].

После комптоновского рассеяния изменение энергии фотона в зависимости от угла отклонения  $\theta$  определяется следующей формулой:

$$E_s = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)}, \quad (1.13)$$

где  $E_0$  – начальная энергия фотона,  $E_s$  – энергия фотона после рассеяния,  $m_0$  – масса электрона и  $c$  – скорость света. Таким образом, фотон, который в результате акта рассеяния отклонился на большой угол, теряет небольшое количество энергии. Это приводит к тому, что для детектора, сделанного из йодида натрия, с энергетическим разрешением 10% существует вероятность регистрации фотонов, отклонившихся на угол до 90 градусов при энергетическом окне в 20%. На практике фотоны, испущенные в результате распада  $^{99m}\text{Tc}$ , и испытавшие множественные акты рассеяния, могут составлять до 20% от общего числа зарегистрированных фотонов на детекторе [41].

В настоящее время существует множество различных алгоритмов коррекции [19, 22, 40, 41, 42, 43], но они либо являются очень простыми и приближительными, либо очень сложными и требуют огромного времени вычисления, что делает их непригодными для практического использования. В целом можно выделить следующие подходы уменьшения влияния рассеяния излучения: компенсационные, которые пытаются компенсировать влияние рассеяния излучения при измерении проекционных данных вместо коррекции измеренных данных; подходы, основанные на прямом измерении рассеянных фотонов; подходы, моделирующие влияние рассеяния излучения для измеренных данных [19, 41].

К компенсационным подходам можно отнести следующие методы: минимизация количества зарегистрированных рассеянных фотонов, модифицированная коррекция ослабления и фильтрация. Минимизация количества зарегистрированных рассеянных фотонов достигается за счёт использования асимметричных энергетических окон вблизи фотопика. Однако, этот метод не позволяет полностью избавиться от рассеянных фотонов. Более того, в результате такой коррекции регистрируется меньшее количество баллистических фотонов. Кроме этого, данный метод не позволяет оценить, насколько много рассеянных фотонов было исключено из показаний детектора. Другой недостаток этого метода заключается в том, что коэффициент коррекции сильно зависит от выбранного энергетического окна, поэтому для каждого из видов асимметричного окна требуются свои данные для коррекции [16, 23, 44, 45].

Модифицированная коррекция ослабления основана на том предположении, что рассеянный фотон не всегда может попасть на детектор. В результате количество зарегистрированных фотонов уменьшается экспоненциально с увеличением расстояния, которое фотон проходит внутри объекта. Таким образом, результат рассеяния излучения можно рассматривать как фотоэлектрическое поглощение, однако, в отличие от поглощения, рассеянные фотоны могут попадать на детектор, но в отличном от начального направления. Таким образом, частичный учёт влияния рассеяния излучения может достигаться за счёт предположения о том, что рассеянный фотон уже никогда не попадёт на детектор. Однако, для получения точного коэффициента поглощения необходимы данные, полученные в отсутствие рассеяния излучения. На практике рассеянные фотоны почти всегда попадают на детектор. В результате регистрируется большее число фотонов, чем ожидалось. Поэтому часто при реконструкции используют меньшее значение коэффициента ослабления, чем полученное при проведении экспериментов. Так, для энергии фотона 140 кэВ коэффициент ослабления в воде равен 0,15



$\text{см}^{-1}$ , но в клинических исследованиях для реконструкции чаще всего используют коэффициент ослабления, равный  $0,12 \text{ см}^{-1}$  [46].

Компенсация за счёт фильтрации изображений использовалась на ранних этапах разработки в качестве метода коррекции влияния рассеяния излучения. Она позволяла достигнуть некоторое улучшение пространственного разрешения, однако большинство фильтров были основаны на предположении о пространственно-независимых аппаратных функциях (point spread functions), что не является правильным даже для случаев, когда рассеяние излучения полностью отсутствует. Поэтому в настоящее время данный метод практически не используется [47].

Коррекция на основе прямого измерения влияния рассеяния излучения состоит из нескольких методов: коррекция за счёт двух, трёх и более энергетических окон, а также на основе спектральных моделей. Коррекция на основе двух энергетических окон достигается за счёт установки дополнительного энергетического окна ниже фотопика. В этом случае второе (нижнее) окно регистрирует фотоны, которые испытали множественное рассеяние. Это позволяет примерно оценить вклад рассеяния излучения в искажения проекций за счёт умножения изображения во втором окне на весовой коэффициент  $k$ . Основной проблемой является то, что пространственное распределение фотонов зависит от энергии фотонов и количества актов рассеяния. В главном (первом) окне регистрируются в основном баллистические фотоны и фотоны, чьи траектории отклонились на незначительный угол и испытали небольшое количество актов рассеяния. Во второе окно попадают фотоны, которые отклонились на значительный угол от начальной траектории движения и испытали множественные акты рассеяния. Таким образом, такая коррекция улучшает контраст за счёт удаления тех фотонов, которые были зарегистрированы далеко от их настоящей точки испускания.

Подход, основанный на использовании трёх энергетических окон, имеет похожий принцип. Однако, в этом случае над основным энергетическим

окном, расположенным около фотопика, располагают два узких энергетических окна (одно сверху и одно снизу). Тогда оценить вклад рассеяния излучения можно с помощью следующей формулы:

$$SE = \left( \frac{C_l}{w_l} + \frac{C_u}{w_u} \right) \times \frac{w_p}{2}, \quad (1.14)$$

где  $C_l$  – зарегистрированное количество фотонов для нижнего энергетического окна,  $C_u$  – зарегистрированное количество фотонов для верхнего энергетического окна,  $w_l$  – ширина нижнего энергетического окна,  $w_u$  – ширина верхнего энергетического окна,  $w_p$  – ширина основного энергетического окна, расположенного в районе фотопика. Этот подход используется в случаях, когда происходит регистрация излучения, имеющего различные энергетические уровни. Для однофотонной эмиссионной компьютерной томографии данный метод ничем не отличается от метода с двумя энергетическими окнами, поскольку можно считать, что в верхнем окне не будет зарегистрировано ни одного фотона. После вычисления оценки вклада рассеяния излучения происходит вычитание для каждого из пикселей в проекциях [41].

На практике часто используется подход трёх энергетических окон, так он является простым и, в отличие от двух энергетических окон, для него не нужно калибровать весовой коэффициент  $k$ , поскольку он вычисляется на основе ширины трёх энергетических окон. Однако, основным недостатком данного подхода является усиление шума в реконструированной томограмме, так как дополнительные окна являются узкими и, как следствие, они регистрируют гораздо меньшее количество фотонов. Этот эффект можно уменьшить, применяя фильтрацию проекций для всех энергетических окон. Также может помочь увеличение ширины узких энергетических окон, но это, в свою очередь, приведёт к смещению оценки рассеяния излучения. Кроме этого, в случаях, когда было зарегистрировано небольшое количество фотонов, вычитание оценочного вклада рассеяния излучения из проекций может привести к отрицательным значениям в проекционных данных. Это, в свою

очередь, приведёт к появлению сильных артефактов на реконструированном изображении [48, 49].

Подходы на основе спектральных моделей связаны с спектральным анализом и моделировании влияния рассеяния излучения. В их основе лежит обработка точной информации об энергии каждого зарегистрированного фотона. На основе этих данных можно осуществить подбор спектральной энергии для зарегистрированных событий для каждого пикселя, используя модель, на основе которой можно отличить баллистические фотоны от рассеянных. Несмотря на то, что данные модели предлагают точную коррекцию влияния рассеяния излучения, в дополнение к этому они являются нестационарными и позволяют осуществлять коррекцию для тех фотонов, которые прибыли извне исследуемого объёма, применение этих методов требует сбор полной информации, включая информацию об энергии или же данные, полученные с помощью большого количества энергетических окон (как правило, больше десяти). В результате данные методы не были экспериментально исследованы и, как следствие, для них не проведено сравнение с более простыми методами коррекции рассеяния излучения [41].

Подходы, моделирующие влияние рассеяния излучения для измеренных данных, применяются для итерационных методов реконструкции. Точный учёт рассеяния излучения в итерационных методах возможен тогда, когда есть точная модель процесса рассеяния излучения. Существует несколько типов моделей рассеяния излучения: аналитические модели на основе уравнения Кляйн-Нишина; свёрточные методы; коррекция рассеяния излучения во время реконструкции. Однако, основным недостатком этих методов является то, что они не учитывают рассеянные фотоны, которые могли достигнуть детектора извне исследуемой области [41].

Аналитические модели на основе уравнения Кляйна-Нишина позволяют осуществить точную коррекцию влияния рассеяния излучения. Однако, полученные выражения содержат интегралы больших степеней и требуют огромных вычислительных мощностей. Поэтому чаще всего аналитические

модели ограничиваются учётом рассеяния излучения первого порядка [50, 51, 52, 53, 54].

Свёрточные методы основаны на упрощённой модели рассеяния излучения, позволяющей представить показания детектора как свёртку распределения источников излучения с известным ядром. Тогда можно оценить вклад рассеяния излучения с помощью решения этой свёртки. При этом параметры ядра свёртки подбираются с помощью дополнительных экспериментов или численного моделирования методом Монте-Карло. Полученная оценка вклада рассеяния излучения позволяет скорректировать показания детектора [41].

Коррекция рассеяния излучения на этапе реконструкции может осуществляться за счёт добавления в знаменатель уравнения MLEM (1.10) или OSEM алгоритма оценки вклада рассеяния излучения, посчитанного заранее или измеренного в ходе проведения исследования. Другим вариантом является добавление модели рассеяния излучения в системную матрицу, которая определяет вероятность для каждой точки пространственного распределения источников излучения достижения конкретной точки детектора. Однако, в результате системная матрица становится очень большой, что приводит к увеличению числа шагов итерационного алгоритма, а это, в свою очередь, приводит к значительному увеличению времени вычисления. Несмотря на то, что модель, описывающая ожидаемый вклад рассеяния излучения, может быть вычислена заранее, она напрямую зависит от самого объекта. В связи с этим для каждого исследуемого объекта такая модель уникальна [41].

Кроме этого, на этапе реконструкции можно использовать моделирование методом Монте-Карло вместо простых моделей оценки рассеяния излучения. В этом случае, зная распределение коэффициента ослабления, можно точно оценить влияние рассеяния излучения для каждого источника излучения. Однако, полное проведение численного моделирования методом Монте-Карло для каждого исследования является очень долгим процессом, поэтому его применение для клинических испытаний не является практичным. В то же

время, существует ряд работ, направленных на оптимизацию численного моделирования прохождения излучения через вещество метода Монте-Карло. Одним из способов ускорения моделирования является ограничение максимального угла отклонения. После того, как фотон отклонился на значение больше указанного угла от начальной траектории, он выбывает из рассмотрения. Однако, несмотря на ускорение моделирования, время вычисления этого метода остаётся достаточно большим, что по-прежнему затрудняет применение этого метода для клинических исследований [31, 55, 56, 57].

#### 1.4. Выводы

1. Однофотонная эмиссионная компьютерная томография является эффективным инструментом исследования пространственных распределений источников излучения. Процесс получения эмиссионной томограммы можно разделить на два основных этапа: измерение исходных данных (проекций) и реконструкция пространственного распределения источников излучения (получение томограммы). При этом на обоих этапах существуют свои факторы, которые приводят к ухудшению точности реконструкции томограммы.

2. Методы реконструкции эмиссионных томограмм можно разделить на два основных класса: интегральные и алгебраические (итерационные). Основным недостатком итерационных методов перед интегральными является большое время вычислений. Поэтому в современных эмиссионных томографах преимущественно применяются интегральные методы реконструкции.

3. В современных однофотонных эмиссионных томографах реализован метод реконструкции, основанный на экспоненциальном преобразовании Радона, который можно назвать традиционным. Данный метод позволяет осуществлять лишь частичный учёт влияния рассеяния за счёт замены коэффициента поглощения на коэффициент ослабления.

## Глава 2. ОФЭКТ в среде со свойством "рассеяние прямо назад"

### 2.1. Уравнение переноса излучения для чисто поглощающей среды

Взаимодействие излучения с веществом описывается с помощью уравнения переноса излучения (УПИ) [6, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. По определению  $dP_a = \mu_a(\vec{r})dl$  – вероятность фотона быть поглощённым при прохождении элементарного пути  $dl$ , а  $dP_s = \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')dld\Omega'$  – вероятность рассеяния фотона в телесный угол  $d\Omega'$  вблизи направления  $\vec{\Omega}'$  при прохождении элементарного пути  $dl$  вблизи точки  $\vec{r}$ , если до акта рассеяния частица двигалась по направлению  $\vec{\Omega}$ . При этом часто предполагают, что среда изотропная, т.е. индикатриса рассеяния  $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') = \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}\vec{\Omega}')$ . В отличие от изотропной среды, изотропному рассеянию соответствует индикатриса рассеяния, независимая от угла рассеяния:  $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}\vec{\Omega}') = \frac{1}{4\pi}\mu_s(\vec{r})$ .

Стационарное уравнение переноса излучения в односкоростном приближении можно записать в следующем виде:

$$\vec{\Omega}\text{grad}(\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) + \mu(\vec{r})\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \iint_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}')\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega})d\Omega' = S(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2.1)$$

где  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  – плотность потока фотонов в точке  $\vec{r}$ , двигающихся по направлению  $\vec{\Omega}$ ,  $\mu(\vec{r}) = \mu_a(\vec{r}) + \mu_s(\vec{r})$  – коэффициент экстинкции,  $\mu_a(\vec{r})$  – коэффициент поглощения,  $\mu_s(\vec{r}) = \iint_{4\pi} \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega})d\Omega'$  – коэффициент рассеяния,  $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega})$  – пространственно неоднородный дифференциальный по углу коэффициент рассеяния (индикатриса рассеяния),  $S(\vec{r}, \vec{\Omega})$  – функция распределения источников излучения,  $\vec{\Omega}' = (\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta')$ ,  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$  – в сферической системе координат.

Коэффициент поглощения  $\mu_a(\vec{r})$  и коэффициент рассеяния  $\mu_s(\vec{r})$  характеризуют неоднородную поглощающую и рассеивающую среду. Однако, в некоторых случаях можно пренебречь изменением этих коэффициентов внутри объекта, т.е. считать, что среда является однородной. В этом случае

$$\mu_a(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_a & \text{в пределах объекта} \\ 0 & \text{вне объекта} \end{cases}, \quad (2.2)$$

$$\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \begin{cases} \mu_s(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) & \text{в пределах объекта} \\ 0 & \text{вне объекта} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Также в эмиссионной томографии можно считать, что источники излучения целиком погружены в область коэффициента поглощения и что сами источники излучения являются изотопными, т.е.  $S(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S(\vec{r})$ . В таком случае уравнение переноса излучения в однородной среде будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{\Omega} \text{grad}(\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) + \mu \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \iint_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \mu_s(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\Omega' = S(\vec{r}). \quad (2.4)$$

Уравнение переноса излучения (2.4) является интегро-дифференциальным и не имеет точного аналитического решения в общем виде. Поэтому, для получения хотя бы примерного решения пользуются различными упрощениями. Используемые упрощения можно разделить на три группы:

1. Условия, накладываемые индикатрису рассеяния, то есть на свойства вещества, взаимодействующего с излучением.
2. Условия, модифицирующие уравнение переноса излучения.
3. Условия, накладываемые на само решение УПИ.

Наиболее предпочтительными являются упрощения, накладываемые индикатрису рассеяния, то есть те условия, которые основаны исключительно на предположениях о свойствах исследуемой среды. Таким образом, наиболее распространённое и используемое приближение чисто поглощающей среды (ЧПС) предполагает лишь равенство индикатрисы рассеяния нулю [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. В этом приближении делается предположение о том, что фотоны могут только поглощаться, а рассеяние излучения полностью отсутствует, т.е.  $\mu_s(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = 0$ . Тогда УПИ для ЧПС можно записать в следующем виде:

$$\vec{\Omega} \text{grad} \left( \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) + \mu_a \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S(\vec{r}), \quad (2.5)$$

Это уравнение, в отличие от исходного уравнения переноса излучения, имеет точное аналитическое решение для произвольного пространственного распределения источников излучения. Решение обратной томографической задачи в этом случае основано на схеме измерений, изображенной на рис. 2.1.

Рассмотрим сечение объекта в плоскости  $z = z_0$  и будем считать, что ось вращения детектора совпадает с осью  $z$  неподвижной декартовой системы координат  $(x, y, z)$ . В этой декартовой системе координат  $S(\vec{r}) = S(x, y, z_0)$ . Введём вращающуюся систему координат  $(\xi, \zeta, z)$ , которая будет повернута на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$  таким образом, что ось  $\zeta$  всегда параллельна линиям проецирования. При этом каждая линия проецирования соответствует отсчёту на позиционно-чувствительном детекторе (ПЧД) для всех значений  $\xi$  и  $\theta$ . Тогда, в такой вращающейся системе координат  $S(\vec{r}) = S_\theta(\xi, \zeta, z_0) = S(\xi \cos \theta - \zeta \sin \theta, \xi \sin \theta + \zeta \cos \theta, z_0)$ .

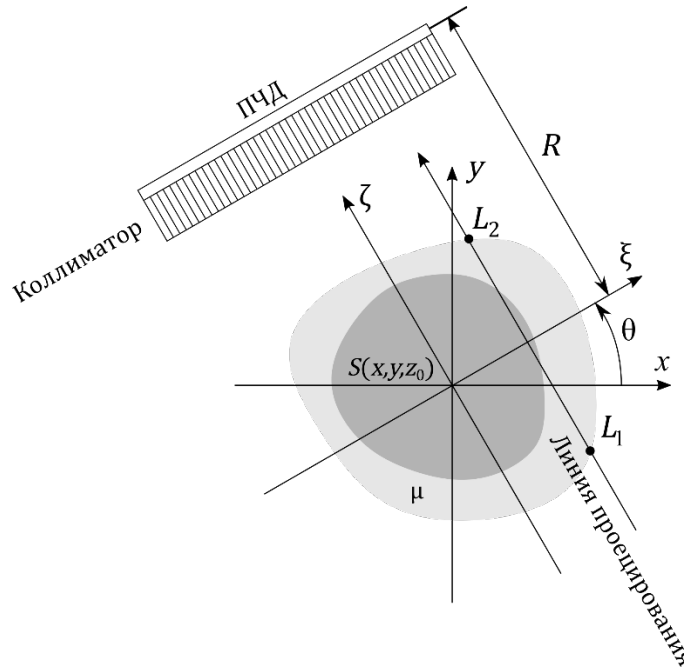


Рис. 2.1. Сечение объекта при  $z = z_0$ : неподвижная  $(x, y)$  и вращающаяся  $(\xi, \zeta)$  системы координат в плоскости  $z = z_0$ .  $L_1, L_2$  – внешние границы объекта на линии проецирования,  $R$  – радиус вращения ПЧД



В этом случае связь показаний детектора с исходным пространственным распределением источников излучения на основе аналитического решения УПИ в ЧПС можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_0(\xi, \theta) &= \exp(-\mu_a L_2) \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu_a \zeta) d\zeta \\ &= \exp(-\mu_a L_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu_a \zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку считается, что границы объекта заранее известны (например, получены с помощью компьютерной томографии), можно каждый отсчёт на детекторе умножить на множитель  $\exp(+\mu_a L_2)$ . Тогда связь между модифицированными проекционными данными и искомым пространственным распределением источников излучения будет описываться экспоненциальным преобразованием Радона:

$$\begin{aligned} p(\xi, \theta) &= p_0(\xi, \theta) \exp(+\mu_a L_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu_a \zeta) d\zeta \\ &= \mathfrak{R}_{\mu_a} \{S(x, y, z_0)\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\mathfrak{R}_{\mu_a}(\bullet)$  – экспоненциальное преобразование Радона с параметром  $\mu_a$ .

В этом случае решение обратной томографической задачи будет сводиться к использованию обратного экспоненциального преобразования Радона к измеренным проекционным данным  $p(\xi, \theta)$ :

$$S(x, y, z_0) = \mathfrak{R}_{\mu_a}^{-1} \{p(\xi, \theta)\}, \quad (2.8)$$

где  $\mathfrak{R}_{\mu_a}^{-1}(\bullet)$  – обратное экспоненциальное преобразование Радона с параметром  $\mu_a$ .

Однако, главным недостатком такого приближения является полное пренебрежение рассеянными фотонами. Поскольку в реальной среде рассеянные фотоны достигают детектор, внося значительный вклад в искажение проекционных данных, необходимо учитывать их влияние [15, 32, 33]. При этом частично учесть влияние рассеянных фотонов можно

следующим образом. С физической точки зрения можно предположить, что любой рассеянный фотон уже никогда не попадёт на детектор, то есть будет считаться поглощённым. Математически такое предположение будет сводиться к замене коэффициента поглощения  $\mu_a$  на коэффициент ослабления  $\mu$  [21, 64, 65]. Тогда УПИ для такого приближения ЧПС будет иметь следующий вид:

$$\vec{\Omega}\text{grad}\left(\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})\right) + \mu\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S(\vec{r}), \quad (2.9)$$

В этом случае на основе аналитического решения уравнения переноса излучения можно получить следующее выражение для показаний детектора:

$$\begin{aligned} p_0(\xi, \theta) &= \exp(-\mu L_2) \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu\zeta) d\zeta \\ &= \exp(-\mu L_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

После избавления данного выражения от граничного влияния с помощью умножения каждого отсчёта на детекторе на множитель  $\exp(+\mu L_2)$  можно получить аналогичную связь показаний детектора с исходным пространственным распределением источников излучения:

$$p(\xi, \theta) = p_0(\xi, \theta) \exp(+\mu L_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu\zeta) d\zeta = \mathfrak{R}_\mu\{S(x, y, z_0)\}, \quad (2.11)$$

Таким образом, решение обратной томографической задачи будет также сводиться к ОЭПР, но с параметром  $\mu$ :

$$S(x, y, z_0) = \mathfrak{R}_\mu^{-1}\{p(\xi, \theta)\}, \quad (2.12)$$

где  $\mathfrak{R}_\mu^{-1}(\bullet)$  – обратное экспоненциальное преобразование Радона с параметром  $\mu$  [64]. Это выражение лежит в основе традиционного метода (ТМ) реконструкции в современных однофотонных эмиссионных компьютерных томографах. Кроме этого, существует ряд работ, направленных на улучшение результатов, полученных с помощью ОЭПР [66, 67, 68, 69, 70], а также при

реконструкции томограмм при неполном наборе исходных данных (при вращении системы менее чем на 360 градусов) [69, 71].

Возможность получения аналитического решения в этом приближении обусловлено отсутствием интегрального слагаемого из УПИ. Решение обратной томографической задачи с помощью обратного экспоненциального преобразования Радона обусловлено сохранением понятия линии проецирования, так как в рассеивающих средах в общем случае они не существуют.

Однако, как уже было сказано, основным недостатком приближения чисто поглощающей среды является пренебрежение процессом рассеяния излучения. Несмотря на то, что алгоритмы реконструкции томограмм в современных эмиссионных томографах основаны именно на этом приближении с учётом замены коэффициента поглощения на коэффициент ослабления излучения, задача более полного учёта влияния рассеяния излучения остаётся актуальной.

## 2.2. Уравнение переноса излучения для однородной рассеивающей среды со свойством "рассеяния прямо назад"

Если предположить, что фотон меняет своё направление на прямо противоположное при каждом акте рассеяния, то в этом случае, также как и в приближении чисто поглощающей среды, будет сохранено понятие линии проецирования [72]. Тогда можно сказать, что такая среда обладает свойством "рассеяние прямо назад" (РПН-среда). В этом случае УПИ также будет иметь точное аналитическое решение в точном виде для произвольного пространственного распределения источников излучения.

Для такой однородной рассеивающей среды индикатрису рассеяния можно записать в следующем виде:

$$\mu_s(\vec{\Omega}'\vec{\Omega}) = \mu_s\delta_2(-\vec{\Omega}'\vec{\Omega}), \quad (2.13)$$

где  $\delta_2(\bullet)$  – поверхностная дельта-функция (двумерная дельта-функция на поверхности единичной сферы). В сферической системе координат это можно записать как

$$\begin{aligned}\delta_2(\vec{\Omega}' \vec{\Omega}) &= \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi), \\ \delta_2(-\vec{\Omega}' \vec{\Omega}) &= \delta(\cos \theta' + \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi - \pi),\end{aligned}\tag{2.14}$$

где  $\delta(\bullet)$  – одномерная дельта-функция Дирака. Тогда  $\mu_s = \oint_{4\pi} \mu_s(\vec{\Omega}' \vec{\Omega}) d\Omega'$ . Введя коэффициент  $\beta = \mu_s/\mu$ , можно записать коэффициент поглощения как  $\mu_a = (1 - \beta)\mu$  и коэффициент рассеяния как  $\mu_s = \beta\mu$ .

В таком случае интегро-дифференциальное УПИ преобразуется в дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\vec{\Omega} \text{grad} \left( \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) + \mu \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \beta \mu \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}) = S(\vec{r}).\tag{2.15}$$

Для того, чтобы решить это уравнение, необходимо рассмотреть это уравнение для двух направлений  $\vec{\Omega}$  и  $-\vec{\Omega}$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \text{grad} \left( \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) + \mu \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \beta \mu \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}) = S(\vec{r}), \\ -\vec{\Omega} \text{grad} \left( \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}) \right) + \mu \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}) - \beta \mu \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S(\vec{r}). \end{cases}\tag{2.16}$$

В этой системе уравнения нужно найти  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  и  $\Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega})$ . Для этого выразим  $\Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega})$  через  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  из первого уравнения

$$\Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}) = \frac{\vec{\Omega} \text{grad} \left( \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right) + \mu \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - S(\vec{r}, \vec{\Omega})}{\mu_s}.\tag{2.17}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{aligned}
 & -\vec{\Omega}\text{grad} \left( \frac{\vec{\Omega}\text{grad}(\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) + \mu\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - s(\vec{r}, \vec{\Omega})}{\mu_s} \right) \\
 & + \mu \frac{\vec{\Omega}\text{grad}(\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})) + \mu\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) - s(\vec{r}, \vec{\Omega})}{\mu_s} - \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})\mu_s \\
 & = S(\vec{r}, -\vec{\Omega}).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dR^2} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - (1 - \beta^2)\mu^2\Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \\
 = \frac{d}{dR} S(\vec{r}) - (1 + \beta)\mu S(\vec{r}).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Поскольку в эмиссионной томографии считается, что все источники излучения полностью погружены в исследуемый объект, то можно записать следующие граничные условия (рис. 2.2):

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_0, \vec{\Omega}) = 0, \\ \vec{\Omega}\text{grad}(\Phi(\vec{r}_1, \vec{\Omega})) + \mu\Phi(\vec{r}_1, \vec{\Omega}) = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Для решения полученного дифференциального уравнения второго порядка необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2}{dR^2} Y(R) - (\mu^2 - \mu_s^2)Y(R) = 0. \tag{2.21}$$

На следующем шаге необходимо найти частное решение этого уравнения в виде  $Y(R) = e^{\lambda R}$ . Для этого нужно найти  $\lambda$ , подставив  $e^{\lambda R}$  в полученное однородное уравнение:

$$\frac{d^2}{dR^2} e^{\lambda R} - (\mu^2 - \mu_s^2)e^{\lambda R} = 0. \tag{2.22}$$

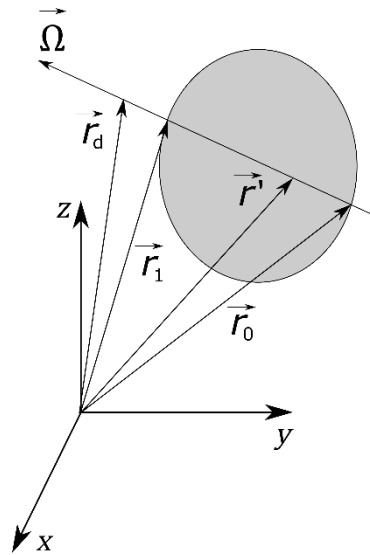


Рис. 2.2. К граничным условиям. Точки  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}_1$  соответствуют пересечению линии проецирования с границей объекта в направлении  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{r}_d$  – точка расположения детектора и  $\vec{r}^i$  – произвольная точка на линии проецирования

Получим следующее выражение:

$$\lambda^2 - (\mu^2 - \mu_s^2) = 0. \quad (2.23)$$

На его основе составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (k\mu)^2 = 0 \quad (2.24)$$

где  $k = \sqrt{1 - \beta^2}$ . Из уравнения следует, что

$$\lambda = \pm k\mu. \quad (2.25)$$

Таким образом, получим следующее общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$Y(R) = C_1 e^{k\mu R} + C_2 e^{-k\mu R}. \quad (2.26)$$

Для того, чтобы найти решение неоднородного уравнения необходимо воспользоваться методом вариации постоянных. Тогда

$$\Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = C_1(R) e^{k\mu(R-R_0)} + C_2(R) e^{-k\mu(R-R_0)}. \quad (2.27)$$

Найдём первую производную:

$$\frac{d}{dR} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \frac{d}{dR} C_1(R) e^{k\mu(R-R_0)} + \frac{d}{dR} C_2(R) e^{-k\mu(R-R_0)}. \quad (2.28)$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) &= e^{k\mu(R-R_0)} C_1'(R) + e^{-k\mu(R-R_0)} C_2'(R) + \\ &+ k\mu e^{k\mu(R-R_0)} C_1(R) - k\mu e^{-k\mu(R-R_0)} C_2(R). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Так как в одном уравнении присутствуют две переменные, то можно ввести дополнительное условие:

$$e^{k\mu(R-R_0)} C_1'(R) + e^{-k\mu(R-R_0)} C_2'(R) = 0. \quad (2.30)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) &= k\mu e^{k\mu(R-R_0)} C_1(R) - k\mu e^{-k\mu(R-R_0)} C_2(R), \\ \frac{d^2}{dR^2} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) &= \frac{d}{dR} k\mu e^{k\mu(R-R_0)} C_1(R) - \frac{d}{dR} k\mu e^{-k\mu(R-R_0)} C_2(R), \\ \frac{d^2}{dR^2} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) &= k\mu e^{k\mu(R-R_0)} C_1'(R) - k\mu e^{-k\mu(R-R_0)} C_2'(R) + \\ &+ (k\mu)^2 C_1(R) e^{k\mu(R-R_0)} + (k\mu)^2 C_2(R) e^{-k\mu(R-R_0)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляя полученные выражения в дифференциальное уравнение второго порядка, получим

$$\begin{aligned} k\mu e^{k\mu(R-R_0)} C_1'(R) - k\mu e^{-k\mu(R-R_0)} C_2'(R) \\ = \frac{d^2}{dR^2} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega})(\mu^2 - \mu_S^2), \end{aligned} \quad (2.32)$$

Сделав замену  $\frac{d^2}{dR^2} \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega})(\mu^2 - \mu_S^2) = S_1(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{k\mu(R-R_0)} C_1'(R) + e^{-k\mu(R-R_0)} C_2'(R) = 0, \\ k\mu e^{k\mu(R-R_0)} C_1'(R) - k\mu e^{-k\mu(R-R_0)} C_2'(R) = S_1(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}). \end{cases} \quad (2.33)$$

Выразим  $C_2'(R)$  из первого уравнения

$$C_2'(R) = -e^{2k\mu(R-R_0)} C_1'(R). \quad (2.34)$$

Тогда

$$C_1'(R) = \frac{e^{-k\mu(R-R_0)}}{2k\mu} S_1(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}). \quad (2.35)$$

Найдём  $C_1(R)$  и  $C_2(R)$  с помощью интегрирования:

$$\begin{aligned}
 C_1(R) &= \int_{R_0}^R \frac{e^{-k\mu(R'-R_0)}}{2k\mu} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + \widetilde{C}_1 \\
 &= \frac{1}{2k\mu} \int_{R_0}^R e^{-k\mu(R'-R_0)} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + \widetilde{C}_1,
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
 C_2(R) &= \int_{R_0}^R -\frac{e^{k\mu(R'-R_0)}}{2k\mu} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + \widetilde{C}_2 \\
 &= -\frac{1}{2k\mu} \int_{R_0}^R e^{k\mu(R'-R_0)} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + \widetilde{C}_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Поскольку

$$\Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = C_1(R)e^{k\mu(R-R_0)} + C_2(R)e^{-k\mu(R-R_0)}, \tag{2.38}$$

то

$$\begin{aligned}
 &\Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \\
 &= \frac{1}{k\mu} \int_{R_0}^R \text{sh}(k\mu(R - R')) S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + e^{k\mu(R-R_0)} \widetilde{C}_1 \\
 &\quad + e^{-k\mu(R-R_0)} \widetilde{C}_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Из первого граничного условия следует, что

$$0 = \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2, \tag{2.40}$$

$$\widetilde{C}_2 = -\widetilde{C}_1. \tag{2.41}$$

Подставив  $\widetilde{C}_2$  в выражение, получим следующее выражение для  $\widetilde{C}_1$

$$\widetilde{C}_1 = -\frac{1}{2k\mu} \int_{R_0}^{R_1} \frac{(k\text{ch}(k\mu(R_1 - R')) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R')))}{(k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)))} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' \tag{2.42}$$

Найдём искомые функции:

$$C_1(R) = \frac{1}{2k\mu} \int_{R_0}^R e^{-k\mu(R'-R_0)} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + \widetilde{C}_1 \tag{2.43}$$

$$C_2(R) = -\frac{1}{2k\mu} \int_{R_0}^R e^{k\mu(R'-R_0)} S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' + \widetilde{C}_2. \tag{2.44}$$



Получим следующее решение:

$$\begin{aligned}
 & \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \\
 &= \frac{1}{k\mu} \int_{R_0}^R \text{sh}(k\mu(R - R')) S_1(\vec{r} + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR' \\
 & - \frac{\text{sh}(k\mu(R - R_0))}{k\mu} \int_{R_0}^{R_1} \frac{(k\text{ch}(k\mu(R_1 - R')) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R')))}{(k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)))} S_1(\vec{r} \\
 & + R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) dR', \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & S_1(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \\
 &= \frac{d}{dR} S(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - \mu S(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - \mu_s S(\vec{r} + R\vec{\Omega}, -\vec{\Omega}). \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Поскольку источник является изотопным, то

$$S_1(\vec{r} + R\vec{\Omega}) = \frac{d}{dR} S(\vec{r} + R\vec{\Omega}) - (\mu + \mu_s) S(\vec{r} + R\vec{\Omega}), \tag{2.47}$$

следовательно

$$\begin{aligned}
 & \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \\
 &= \frac{1}{k\mu} \int_{R_0}^R \text{sh}(k\mu(R - R')) \left[ \frac{d}{dR} S(\vec{r} + R'\vec{\Omega}) - (\mu + \mu_s) S(\vec{r} + R'\vec{\Omega}) \right] dR' \\
 & - \frac{\text{sh}(k\mu(R - R_0))}{k\mu} \int_{R_0}^{R_1} \frac{(k\text{ch}(k\mu(R_1 - R')) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R')))}{(k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)))} \left[ \frac{d}{dR} S(\vec{r} \right. \\
 & \left. + R'\vec{\Omega}) - (\mu + \mu_s) S(\vec{r} + R'\vec{\Omega}) \right] dR' \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и рассмотрев интегралы по отдельности, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & \Phi(\vec{r} + R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \\
 = & - \frac{\text{sh}(k\mu(R - R_0))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)) \right)} kS(\vec{r} + R_1\vec{\Omega}) \\
 & + \frac{1}{k\mu} \int_{R_0}^R S(\vec{r} + R'\vec{\Omega}) \left( k\mu\text{ch}(k\mu(R - R')) \right. \\
 & \left. - (\mu + \mu_s)\text{sh}(k\mu(R - R')) \right) dR' \\
 & + \frac{\text{sh}(k\mu(R - R_0))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)) \right)} \int_{R_0}^{R_1} \left[ \mu\text{sh}(k\mu(R_1 - R'))(1 \right. \\
 & \left. - k^2) + \mu_s \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R')) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R')) \right) \right] S(\vec{r} + R'\vec{\Omega}) dR'
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Поскольку  $R_0\vec{\Omega} + \vec{r}_0 = \vec{r}$ ,  $R_0 = -|\vec{r} - \vec{r}_0|$ ,  $\vec{r} + R_1\vec{\Omega} = \vec{r}_1$ ,  $R_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}|$ ,  $\vec{r} + R\vec{\Omega} = \vec{r}_1'$  и  $R = |\vec{r}_1' - \vec{r}|$  (рис. 2.2), то

$$\begin{aligned}
 & \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \\
 = & - \frac{\text{sh}(k\mu(|\vec{r} - \vec{r}_0|))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| + |\vec{r} - \vec{r}_0|)) + \text{sh}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| + |\vec{r} - \vec{r}_0|)) \right)} kS(\vec{r} \\
 & + |\vec{r}_1 - \vec{r}|\vec{\Omega}) \\
 & + \frac{1}{k\mu} \int_{-|\vec{r} - \vec{r}_0|}^0 S(\vec{r} + R'\vec{\Omega}) \left( k\mu\text{ch}(k\mu(-R')) - (\mu + \mu_s)\text{sh}(k\mu(-R')) \right) dR' \\
 & + \frac{\text{sh}(k\mu(|\vec{r} - \vec{r}_0|))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| + |\vec{r} - \vec{r}_0|)) + \text{sh}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| + |\vec{r} - \vec{r}_0|)) \right)} \\
 & \int_{-|\vec{r} - \vec{r}_0|}^{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} \left[ \mu\text{sh}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| - R'))(1 - k^2) \right. \\
 & \left. + \mu_s \left( k\text{ch}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| - R')) + \text{sh}(k\mu(|\vec{r}_1 - \vec{r}| - R')) \right) \right] S(\vec{r} \\
 & + R'\vec{\Omega}) dR'
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Полученное выражение справедливо для  $\vec{r}$ , находящегося внутри среды. Если  $\vec{r}$  находится вне среды, то верхней предел в интеграле преобразуется из нуля в  $R_1$ :

$$\begin{aligned}
 & \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \\
 &= - \frac{\text{sh}(k\mu(R_1 - R_0))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)) \right)} kS(\vec{r} + R_1 \vec{\Omega}) \\
 &+ \frac{1}{k\mu} \int_{R_0}^{R_1} S(\vec{r} + R' \vec{\Omega}) \left( k\mu \text{ch}(k\mu(R_1 - R')) \right. \\
 &- (\mu + \mu_s) \text{sh}(k\mu(R_1 - R')) \left. \right) dR' \\
 &+ \frac{\text{sh}(k\mu(R_1 - R_0))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)) \right)} \int_{R_0}^{R_1} \left[ \mu \text{sh}(k\mu(R_1 - R')) (1 \right. \\
 &- k^2) + \mu_s \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R')) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R')) \right) \left. \right] S(\vec{r} + R' \vec{\Omega}) dR'.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

После приведения подобных получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= - \frac{\text{sh}(k\mu(R_1 - R_0))}{k\mu \left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)) \right)} kS(\vec{r} + R_1 \vec{\Omega}) \\
 &+ \frac{1}{\left( k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0)) \right)} \int_{R_0}^{R_1} S(\vec{r} \\
 &+ R' \vec{\Omega}) \left[ k\text{ch}(k\mu(R' - R_0)) \right. \\
 &+ \left. \frac{(\mu + \mu_s)}{\mu} \text{sh}(k\mu(R' - R_0)) \right] dR'
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Поскольку в эмиссионной томографии считается, что источники излучения полностью погружены в исследуемый объект и, переходя к пределу

$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{d}{dR} \Phi(\vec{r} + R \vec{\Omega}, \vec{\Omega})$ , получим:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \int_{R_0}^{R_1} S(\vec{r} \\
 &+ R' \vec{\Omega}) \left[ \frac{k\text{ch}(k\mu(R' - R_0)) + (1 + \beta) \text{sh}(k\mu(R' - R_0))}{k\text{ch}(k\mu(R_1 - R_0)) + \text{sh}(k\mu(R_1 - R_0))} \right] dR'
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Поскольку в данном случае фотон всё время перемещается по одной линии, то понятие линии проецирования сохраняется. Это позволяет перейти к обычной томографической схеме измерений с параллельными проекциями (рис. 2.1). Во вращающейся системе координат  $\vec{r} = (\xi, R, z_0)$ ,  $\vec{r}_0 = (\xi, L_1, z_0)$ ,

$\vec{r}_1 = (\xi, L_2, z_0)$ ,  $\vec{\Omega} = (0, 1, 0)$ ,  $R_0 = -(R - L_1)$ ,  $R_1 = (L_2 - R)$ . Произведя замену переменных  $\zeta = R' + R$ , получим выражение

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{k \operatorname{ch}(k\mu(\zeta - L_1)) + (1 + \beta) \operatorname{sh}(k\mu(\zeta - L_1))}{(k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1)))} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) d\zeta. \quad (2.54)$$

Полученное выражение (2.54) значительно отличается от ослабленного преобразования Радона (2.7), но при  $\mu_s \rightarrow 0$  ( $\mu \rightarrow \mu_a, \beta \rightarrow 0, k \rightarrow 1$ ) непрерывно переходит в него. Поэтому можно назвать его обобщённым ослабленным экспоненциальным преобразованием Радона.

Полученное точное аналитическое решение (2.54) УПИ в приближении "рассеяние прямо назад" позволяет точно решить обратную томографическую задачу с использованием экспоненциального преобразования Радона. Для этого необходимо ввести понятие оппозитного измерения, т.е. измерения, полученное при повороте на 180 градусов от текущего (прямого) измерения. Определим оппозитное измерение  $\Phi'(\vec{r}', \vec{\Omega}')$ , для которого  $\vec{\Omega}' = -\vec{\Omega}$ ,  $\vec{r}' = (-\xi, R', z_0)$ ,  $\vec{r}_0' = (-\xi, -L_2, z_0)$ ,  $\vec{r}_1' = (-\xi, -L_1, z_0)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Phi'(\vec{r}', \vec{\Omega}') \\ &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{k \operatorname{ch}(k\mu(\zeta - L_2)) - (1 + \beta) \operatorname{sh}(k\mu(\zeta - L_2))}{(k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1)))} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Тогда, воспользовавшись определениями прямого и оппозитного измерений, можно получить выражение, связывающее исходное пространственное распределение источников излучения с измеренными проекционными данными. Это выражение для проекций будет соответствовать экспоненциальному преобразованию Радона:

$$\begin{aligned}
 p(\xi, \theta) &= \frac{1 + \beta + k}{2(1 + \beta)} \Phi(\vec{r}_d, \vec{\Omega}) e^{k\mu L_2} + \frac{1 + \beta - k}{2(1 + \beta)} \Phi'(\vec{r}'_d, \vec{\Omega}') e^{k\mu L_1} \\
 &= \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(k\mu\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(k\mu\zeta) d\zeta \quad (2.56) \\
 &= \mathfrak{R}_{k\mu}\{S(x, y, z_0)\},
 \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{R}_{k\mu}(\bullet)$  – экспоненциальное преобразование Радона с параметром  $k\mu$ . Стоит заметить, что в данном случае экспоненциальное преобразование Радона имеет параметр  $k\mu$ , в отличие от приближения чисто поглощающей среды, где использовался параметр  $\mu_a$  и параметр  $\mu$  при частичном учёте рассеяния излучения.

Используя полученную формулу (2.56), можно воспользоваться хорошо разработанным аппаратом обратного экспоненциального преобразования Радона для реконструкции пространственного распределения источников излучения  $S(x, y, z_0)$ :

$$S(x, y, z_0) = \mathfrak{R}_{k\mu}^{-1}\{p(\xi, \theta)\}. \quad (2.57)$$

Полученное решение УПИ описывает связь между измеренными данными и исходным пространственным распределением источников излучения для среды со свойством "рассеяние прямо назад". Это позволяет производить реконструкцию томограмм РПН-среде.

Таким образом, полученное выражение для УПИ с граничными условиями (2.20) является точным решением этого УПИ, а выражение (2.56) является точным решением обратной томографической задачи. При этом полученное решение по уровню строгости соответствует получению экспоненциального преобразования Радона в чисто поглощающей среде.

### 2.3. Методы моделирования проекций в ОФЭКТ

Для проведения исследований необходимо иметь проекционные данные. Проведение натурального эксперимента является наилучшим для получения показаний детектора [73]. При использовании реального томографа и

реального детектора каждый гамма-квант будет характеризоваться истинной точкой испускания, траекторией движения и взаимодействиями с конкретными атомами в веществе среды. Это также позволяет учесть характеристики коллиматора и детектора, такие как проникаемость каналов коллиматора и энергетическое разрешение детектора. В то же время, проведение натурального эксперимента связано со значительными расходами на изготовление томографа, исследуемого фантома и радиофармпрепарата. Данный недостаток делает этот подход нецелесообразным для применения на этапе исследования метода учёта влияния рассеяния излучения. При этом для такого исследования желательно иметь проекции, которые не отличаются от получаемых при проведении натурального эксперимента.

Для получения проекционных данных без проведения натурального эксперимента можно использовать численное моделирование. Численные методы для получения показаний детектора можно разделить на две группы: численное моделирование на основе аналитических формул и численное моделирование методом Монте-Карло.

В численном моделировании на основе аналитических формул показания детектора вычисляются с помощью уравнения переноса излучения на основе описания процесса взаимодействия излучения с веществом. В это уравнение входят усреднённые феноменологические характеристики среды и излучения [58, 59, 60, 61, 62]. Данный способ получения функции плотности потока фотонов в произвольной точке пространства является быстрым и эффективным способом, несмотря на то что в УПИ входят не все параметры взаимодействия излучения с веществом. Затем, используя решение УПИ, можно быстро получить показания детектора для исследуемого пространственного распределения источников излучения.

Моделирование траекторий каждого из гамма-квантов по отдельности с помощью метода Монте-Карло является вторым способом получения показаний детектора. Несмотря на то, что при этом вместо настоящего расположения атомов внутри вещества объекта используется некоторое

усреднённое, в результате получаются показания детектора, которые практически не отличаются от натурального эксперимента. Основным преимуществом данного метода является доступ к информации, которую невозможно получить, используя другие способы получения проекционных данных. К этой информации относятся траектория движения каждого из фотонов и история их взаимодействий со средой. Однако, при моделировании траекторий фотонов методом Монте-Карло необходимо учитывать как можно больше различных особенностей взаимодействия излучения с веществом. Такими особенностями является материал и атомная структура среды объекта, характеристики источников излучения, поглощение излучения, комптоновское и рэлеевское рассеяние излучения, и другие. Всё это делает способ получения проекционных данных методом Монте-Карло достаточно точным и позволяет сэкономить значительный объём средств. Незначительным недостатком данного метода можно считать относительно большое время вычисления.

## 2.4. Выводы

1. Одним из перспективных направлений учета влияния рассеяния излучения является разработка модели рассеивающей среды (индикатрисы рассеяния), позволяющей точно решить уравнение переноса излучения и на этой основе точно решить обратную томографическую задачу.

2. Приближение чисто поглощающей среды позволяет решить уравнение переноса излучения аналитически в общем виде, В то же время, его основным недостатком является полное пренебрежение рассеянием излучения. Частично влияние рассеяния излучения можно учесть, заменив коэффициент поглощения излучения на коэффициент ослабления. Однако, при этом задача полного учёта влияния рассеяния излучения остаётся нерешённой.

3. Уравнение переноса излучения для однородной рассеивающей среды со свойством "рассеяние прямо назад" допускает точное аналитическое решение в общем случае. На основе аналитического решения можно получить решение обратной томографической задачи.

4. Аналитическое решение уравнения переноса излучения позволяет быстро вычислить показания детектора (проекционные данные). Это избавляет от необходимости создавать томограф, радиофармпрепарат и исследуемый фантом. Полученные таким способ проекции можно использовать для предварительного исследования предлагаемых методов реконструкции томограмм.

5. Использование численного моделирования траекторий фотонов методом Монте-Карло позволяет учесть почти все особенности взаимодействия излучения с веществом. При этом показания детектора практически не отличаются от тех, которые были бы получены в реальном томографе для реальной среды и реального объекта, а также обеспечивает получение информации, недоступной при проведении натурального эксперимента, такой как траектория и судьба каждого отдельного фотона.

Основные результаты, полученные в главе 2, опубликованы в [74].



## Глава 3. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ при аналитическом вычислении проекций

### 3.1. Программа аналитического моделирования прохождения излучения через вещество в среде со свойством "рассеяние прямо назад"

Для аналитического исследования влияния рассеяния излучения на точность реконструкции томограмм и сравнения эффективности методов реконструкции была разработана программа моделирования прохождения излучения в однородной рассеивающей среде на языке MatLab. Данная программа позволяет проводить численное моделирование проекционных данных  $p(\xi, \theta)$  для однофотонной эмиссионной компьютерной томографии для среды со свойством "рассеяние прямо назад". Интерфейс программы представлен на рис. 3.1. Блок-схема работы программы представлена на рис. 3.2. Интерфейс программы состоит из трёх частей: исследуемый объект, измерение проекций и реконструкция.

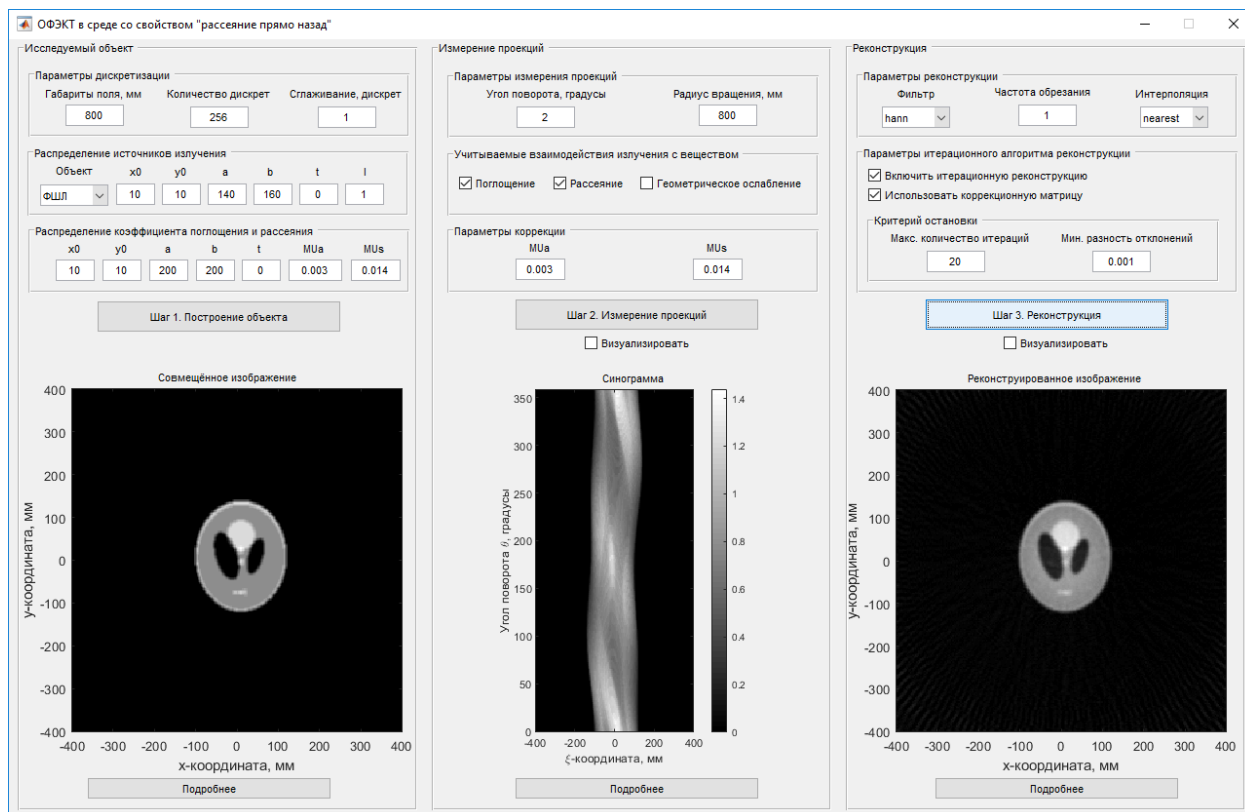


Рис. 3.1. Интерфейс главного окна программы «ОФЭКТ в среде со свойством "рассеяние прямо назад"»

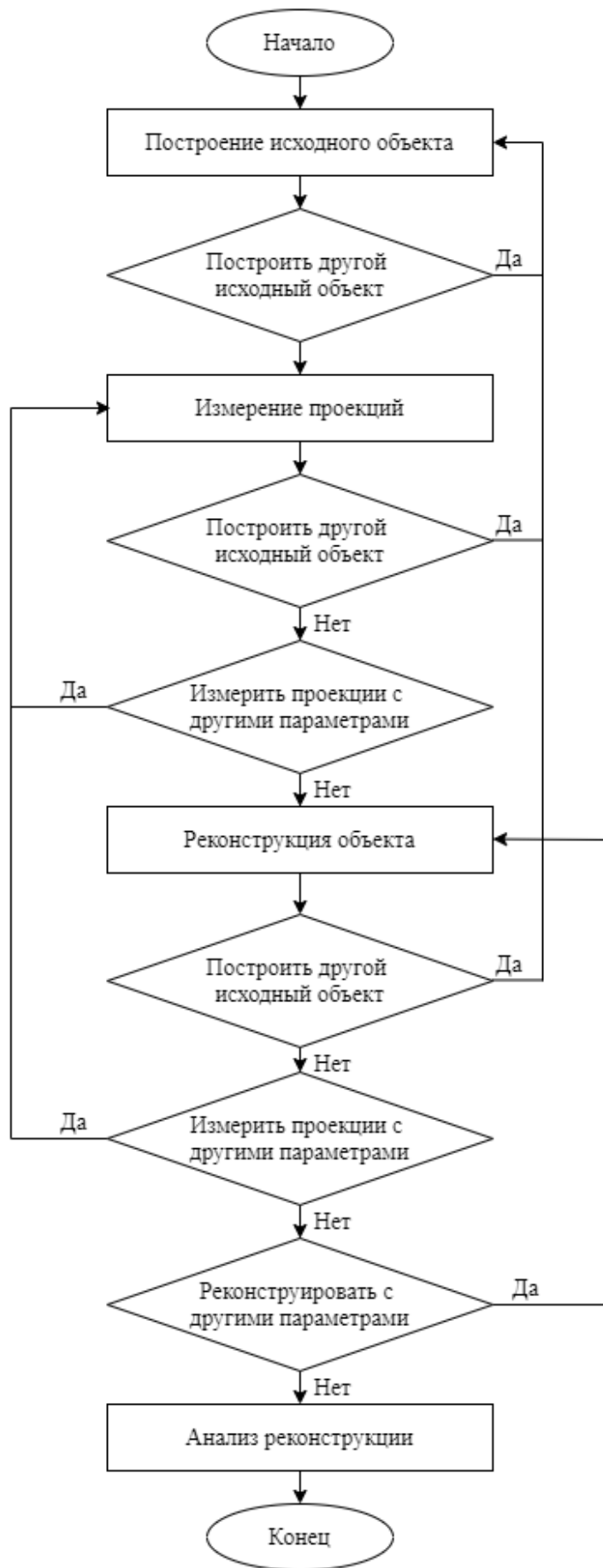


Рис. 3.2. Блок-схема работы программы

В разделе «Исследуемый объект» задаются параметры дискретизации и исследуемого объекта. К параметрам дискретизации мира относятся габариты рабочего поля в миллиметрах, количество дискрет исходного изображения и размер ядра фильтра алгоритма быстрого гауссовского размытия изображения для сглаживания границ объекта.

К параметрам исходного исследуемого объекта относятся две группы элементов: распределение источников излучения и распределение коэффициента поглощения и рассеяния. В первой группе элементов «Распределение источников излучения» задаётся тип объекта из библиотеки доступных типов объектов: "Эллипс" или "Фантом Шеппа-Логана" (ФШЛ). Параметры объекта типа "Фантом Шеппа-Логана", вписанного в единичную окружность, представлены в табл. 3.1. Для обоих видов объектов задаются координаты их центра по оси  $x$  и  $y$  (параметры  $x_0$ ,  $y_0$  соответственно), размер полуоси объекта по оси  $x$  (параметр  $a$ ), размер полуоси объекта по оси  $y$  (параметр  $b$ ), поворот изображения относительно оси  $x$  в градусах (параметр  $t$ ) и интенсивность излучения (параметр  $I$ ).

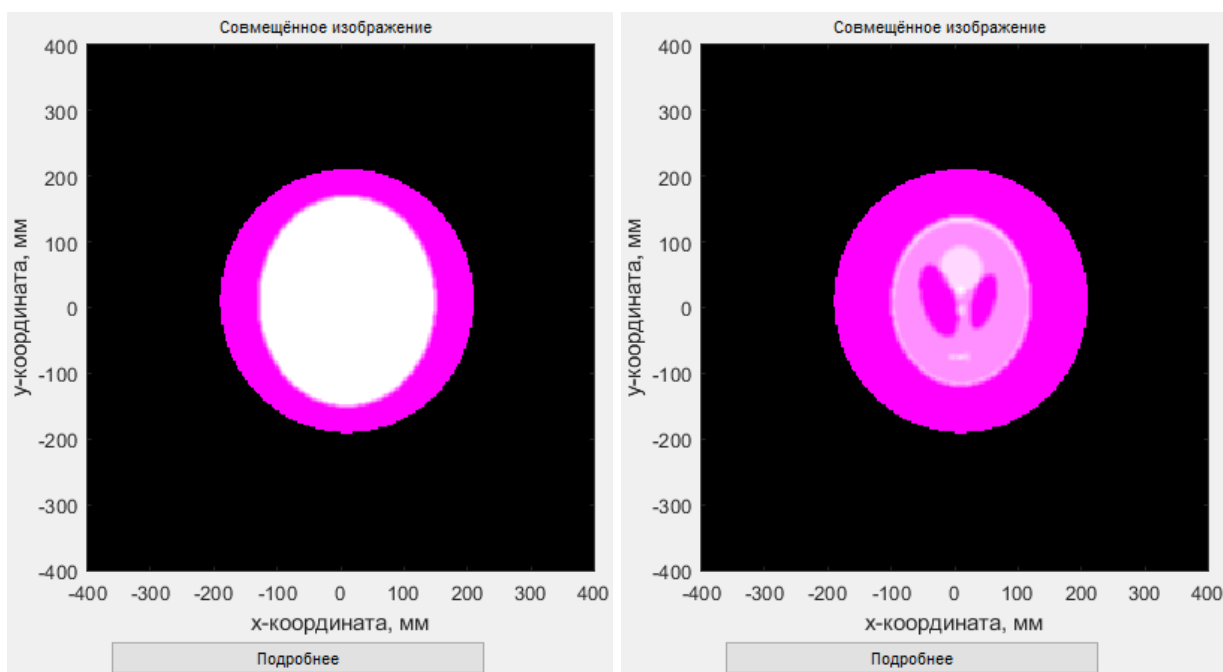
Вторая группа элементов «Параметры распределения коэффициентов поглощения и рассеяния» содержит характеристики среды, погруженной в эллипс, для которого задаются координаты их центра по оси  $x$  и  $y$  (параметры  $x_0$ ,  $y_0$  соответственно), размер полуоси объекта по оси  $x$  (параметр  $a$ ), размер полуоси объекта по оси  $y$  (параметр  $b$ ), угол поворота относительно оси  $x$  в градусах (параметр  $t$ ). К характеристикам среды относятся значение коэффициента поглощения излучения  $\mu_a$  в  $\text{мм}^{-1}$  и коэффициента рассеяния  $\mu_s$  в  $\text{мм}^{-1}$ .

После того, как заданы параметры исследуемого объекта и параметры распределения коэффициентов поглощения и рассеяния, необходимо построить соответствующие исходные распределения. Это делается с помощью кнопки «Шаг 1. Построение объекта». После нажатия этой кнопки будет построены оба пространственных распределения и отображено совмещённое изображение в режиме наложения двух изображений. На

совмещённом изображении розовым цветом отображается область распределения коэффициента ослабления, а оттенками серого отображается пространственное распределение источников излучения. Результат работы этого шага для объекта типа "Эллипс" и "Фантом Шеппа-Логана" показаны на рис. 3.3.

Табл. 3.1. Параметры объекта типа "Фантом Шеппа-Логана"

Номер эллипса	Центр по оси x, мм	Центр по оси y, мм	Полуось по оси x, мм	Полуось по оси y, мм	Угол поворота, градусы	Интенсивность
1	0	0	0,69	0,92	90	0,3
2	0	0	0,6624	0,874	90	-0,1
3	0	0,22	0,11	0,31	72	-0,2
4	0	-0,22	0,16	0,41	108	-0,2
5	0,35	0	0,21	0,35	90	0,1
6	0,10	0	0,46	0,46	0	0,1
7	-0,10	0	0,46	0,46	0	0,1
8	-0,605	0,8	0,23	0,46	0	0,1
9	-0,605	0	0,23	0,23	0	0,2
10	-0,605	6	0,23	0,46	90	0,1



а

б

Рис. 3.3. Совмещённое изображение для объекта типа "Эллипс" (а) и "Фантом Шеппа-Логана" (б)

Для полученных исходных изображений можно открыть окно с дополнительной информацией, нажав на кнопку «Подробнее». Тогда откроется новое окно, в котором будет отображено совмещённое изображение, а также трёхмерное изображение в виде поверхности для пространственного распределения источников излучения. Это окно для объекта типа "Эллипс" показано на рис. 3.4.

В разделе «Измерение проекций» задаются параметры измерения проекций. Эти параметры делятся на три группы: параметры измерения проекций, учитываемые взаимодействия излучения с веществом и параметры коррекции измеренной синограммы.

В параметрах измерения проекций задаётся дискретный угол поворота системы детектирования, а также радиус вращения системы. Из учитываемых взаимодействий излучения с веществом можно выбрать поглощение излучения, рассеяние излучения и геометрическое ослабление излучения.

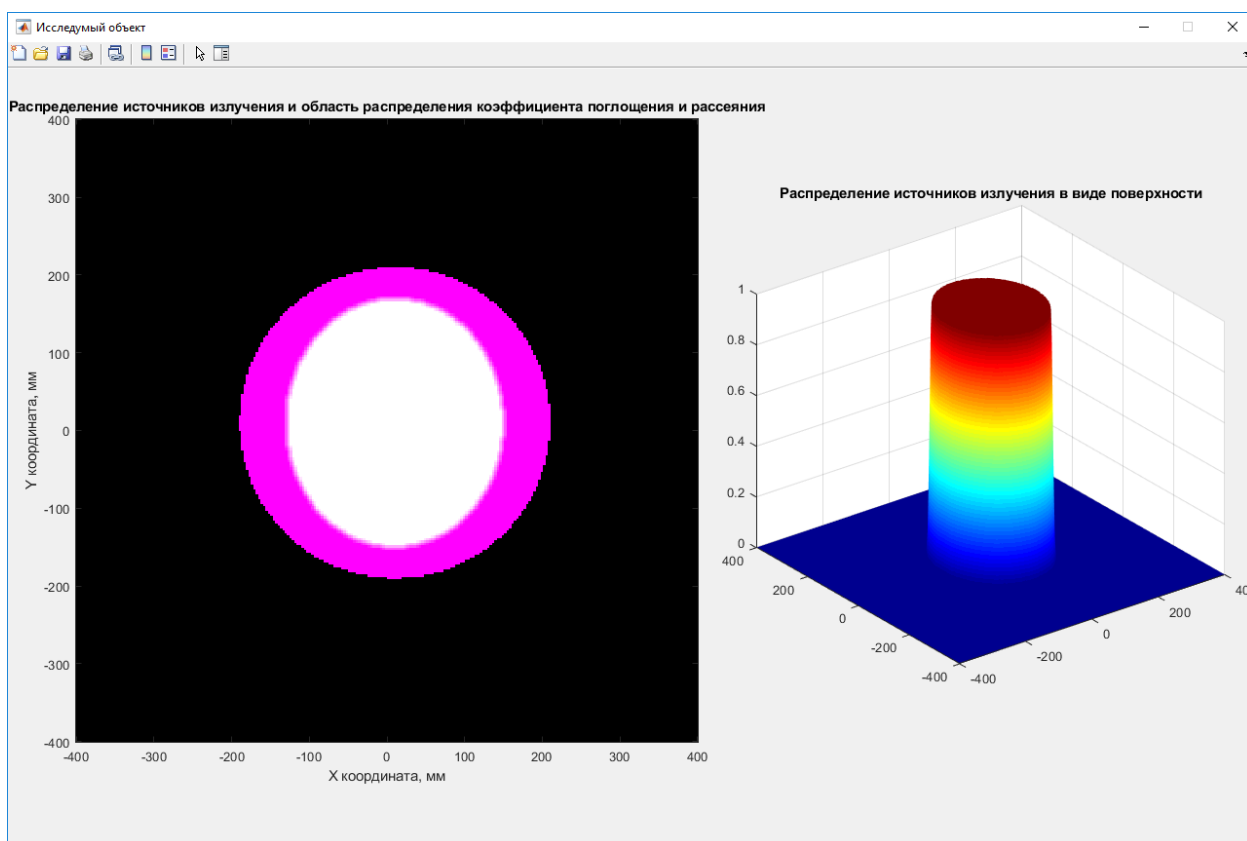


Рис. 3.4. Окно «Исследуемый объект» для объекта типа "Эллипс"

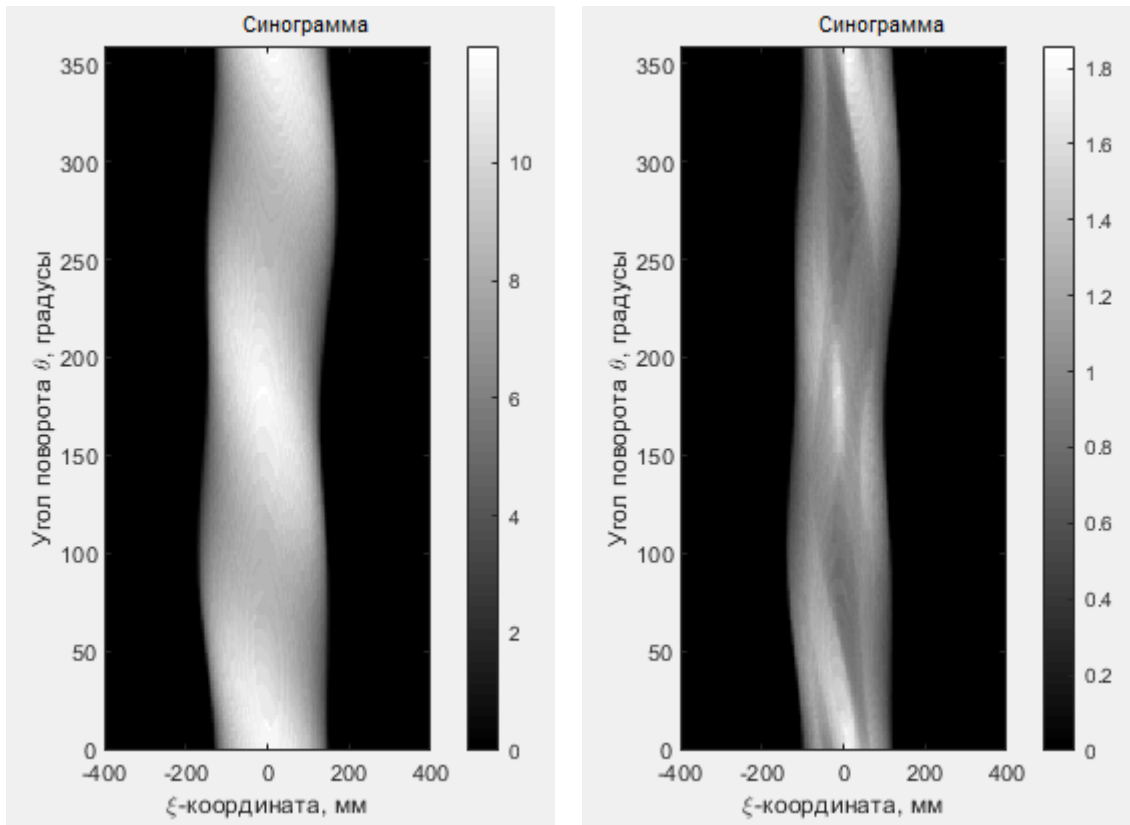
Для измеренных показаний детектора можно произвести коррекцию на основе указанных параметров коррекции: коэффициента поглощения излучения  $\mu_a$  в  $\text{мм}^{-1}$  и коэффициента рассеяния  $\mu_s$  в  $\text{мм}^{-1}$ . Эта коррекция будет произведена при реконструкции с помощью традиционного и нового методов.

После установки значений параметров нажатие на кнопку «Шаг 2. Измерение проекций» осуществляет численное моделирование показаний детектора на основе аналитических формул для исходного объекта при указанных ранее параметрах распределения коэффициента экстинкции. Результатом работы этого шага являются проекционные данные. Примеры полученных синограмм для объектов типа "Эллипс" и "Фантом Шеппа-Логана" показаны на рис. 3.5.

На данном этапе можно вывести подробную информацию для полученных синограмм. Это делается с помощью кнопки «Подробнее», при нажатии на которую открывается новое окно, в котором будет отображены три синограммы: измеренная синограмма, синограммы после предварительной обработки для традиционного и нового методов. Пример этого окна показан на рис. 3.6.

После построения синограммы осуществляется реконструкция пространственного распределения источников излучения. На этом шаге задаются две группы параметров: параметры реконструкции и параметры однородной рассеивающей среды.

В параметрах реконструкции выбирается один из пяти доступных фильтров: фильтр Рамачандрана и Лакшминараянана, косинусный, Ханна, Хэмминга и Шеппа-Логана. После этого задаётся частота обрезания и метод интерполяции изображения на этапе обратного проецирования: линейный или метод ближайшего соседа. В параметрах среды задаются используемые при реконструкции значения коэффициентов поглощения и рассеяния излучения.



а

б

Рис. 3.5. Синограмма для объектов типа "Эллипс" (а) и "Фантом Шеппа-Логана" (б)

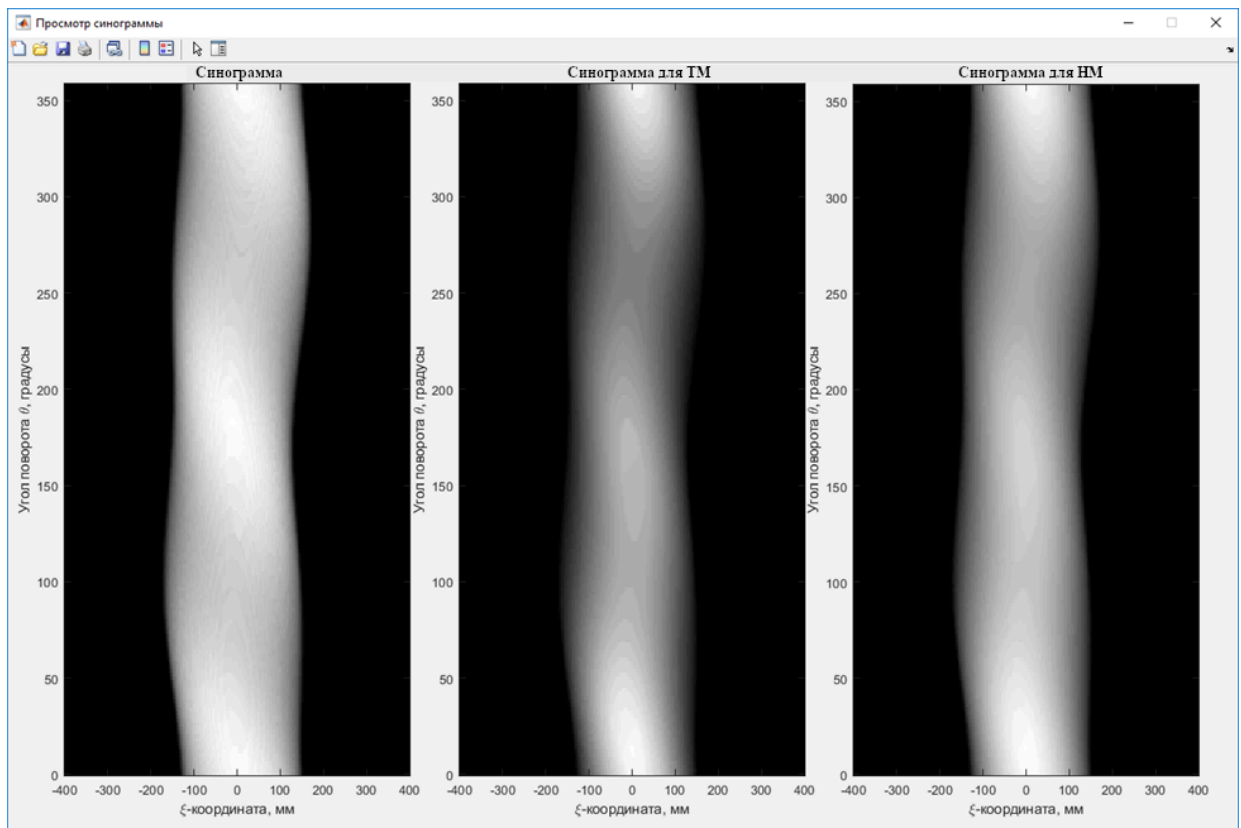


Рис. 3.6. Окно «Просмотр синограммы» для объекта типа "Эллипс"

Кнопка «Шаг 3. Реконструкция» отвечает за проведение реконструкции и вывода полученного результата для среды со свойством "рассеяние прямо назад". Результаты реконструкции для объектов типа "Эллипс" и "Фантом Шеппа-Логана" показаны на рис. 3.7.

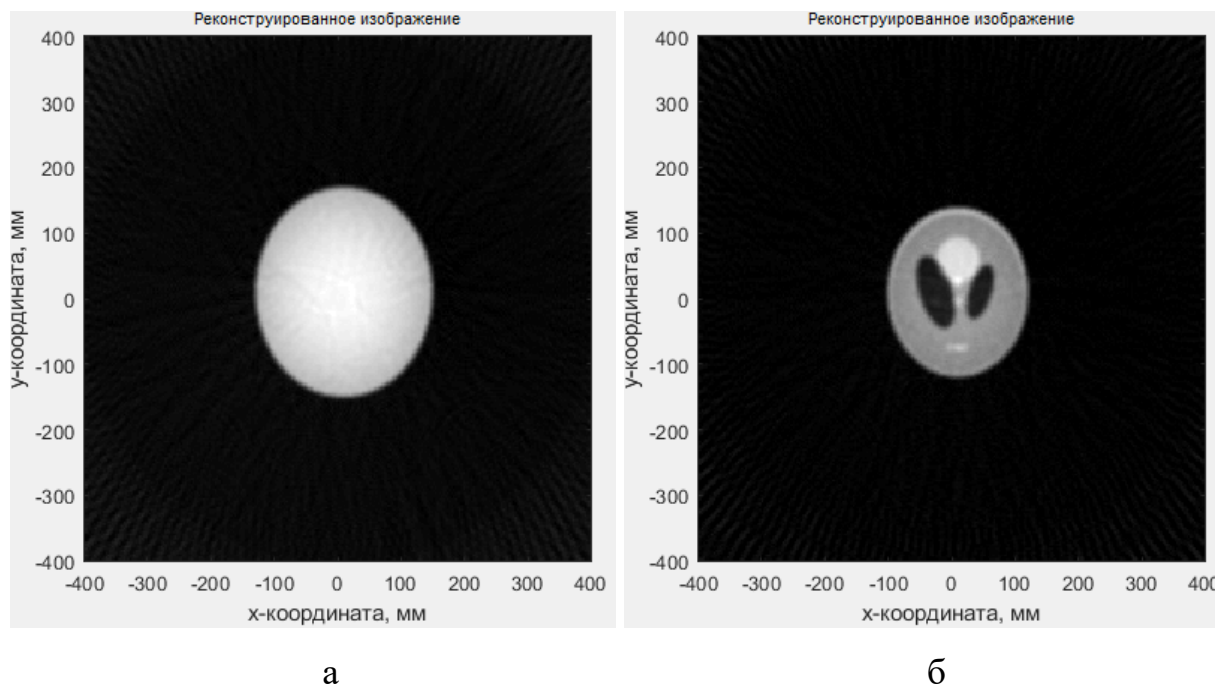


Рис. 3.7. Результат реконструкции для объектов типа "Эллипс" (а) и "Фантом Шеппа-Логана" (б)

После окончания процесса реконструкции изображения автоматически открывается окно "Анализ точности реконструкции распределения источников излучения". Это окно предназначено для более детального исследования точности реконструкции изображения. Внешний вид этого окна для объекта типа "Фантом Шеппа-Логана" представлен на рис. 3.8.

Окно анализа точности реконструкции состоит из трёх групп элементов: реконструкция традиционным методом, сравнение исходного и реконструированного распределений источников излучений, реконструкция новым методом (НМ).

В первой группе отображается томограмма, полученная для традиционного метода. На верхнем изображении показывается реконструированное пространственное распределение источников излучения,



а на нижнем отображается сравнение сечений исходного (синяя линия) и реконструированного изображения (красная линия).

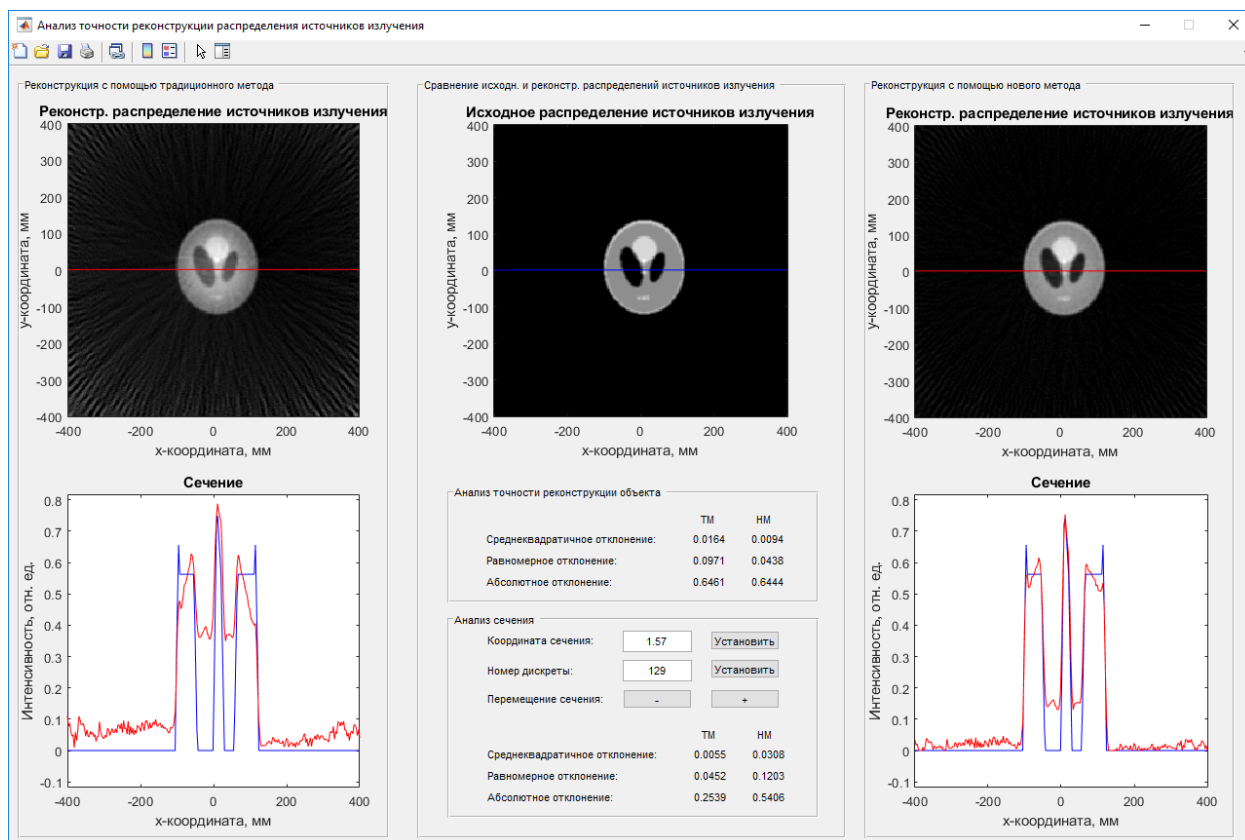


Рис. 3.8. Окно «Анализ точности реконструкции распределения источников излучения»

Во второй группе в верхней части отображается исходное пространственное распределение источников излучения, а в нижней части окна показывается информация о точности реконструкции объекта, которая состоит из двух частей: анализ точности реконструкции объекта и анализ точности реконструкции в сечении.

Анализ точности реконструкции объекта содержит информацию о точности реконструкции изображения по трём критериям: среднеквадратичное отклонение, равномерное отклонение и абсолютное отклонение для всего объекта при реконструкции традиционным и новым методами. Анализ сечения состоит из панели выбора текущего сечения с помощью установки координаты сечения или же номера сечения. Кроме этого,

данная панель содержит информацию об трёх критериях реконструкции для выбранного сечения.

Третья группа окна анализа точности реконструкции, как и первая, состоит из двух частей: сверху расположена томограмма, полученная с помощью нового метода реконструкции, а снизу сравнение сечений исходного объекта (синяя линия) и реконструированного (красная линия).

Для упрощения выбора исследуемого сечения управление реализовано пятью различными способами: с помощью мыши при нажатии на изображение, с помощью установки координаты сечения изображения, с помощью установки номера дискреты изображения, с помощью кнопок уменьшения (-) и увеличения (+) текущей дискреты сечения на единицу, а также с помощью клавиатуры (стрелочка вниз для уменьшения номера дискреты, стрелочка вверх для увеличения номера дискреты).

На реконструированных томограммах отображение текущего положения сечения отображается красной линией, а на исходном изображении пространственного распределения источников излучения синей линией. При изменении номера дискреты с помощью мыши, клавиатуры или кнопок плюс и минус происходит автоматически построение нового сечения, обновление изображений сечений и пересчёт критериев отклонения для выбранного сечения. При изменении текущего положения сечения с помощью полей ввода обновление происходит при нажатии на кнопку «Установить».

Таким образом, разработанная программа численного моделирования ОФЭКТ в РПН-среде позволяет осуществлять реконструкцию с помощью традиционного метода и нового метода.

### 3.2. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ на основе аналитического моделирования проекций

На первом этапе численное моделирование на основе аналитических формул проводилось с помощью разработанной программы «ОФЭКТ в среде со свойством "рассеяние прямо назад"». Такое моделирование позволяет

быстро получить показания детектора  $p(\xi, \theta)$  для среды, обладающей свойством "рассеяние прямо назад". В качестве исследуемых объектов были выбраны объекты типа "Эллипс" и "Фантом Шеппа-Логана", полностью погруженные в эллипс радиусом  $R_0$ , наполненным водой. Изображения исследуемых пространственных распределений источника излучения показаны на рис. 3.9. Численное моделирование проводилось с целью исследования зависимостей точности реконструкции от габаритов объекта  $R_0$  и коэффициента пропорциональности  $\beta$ .

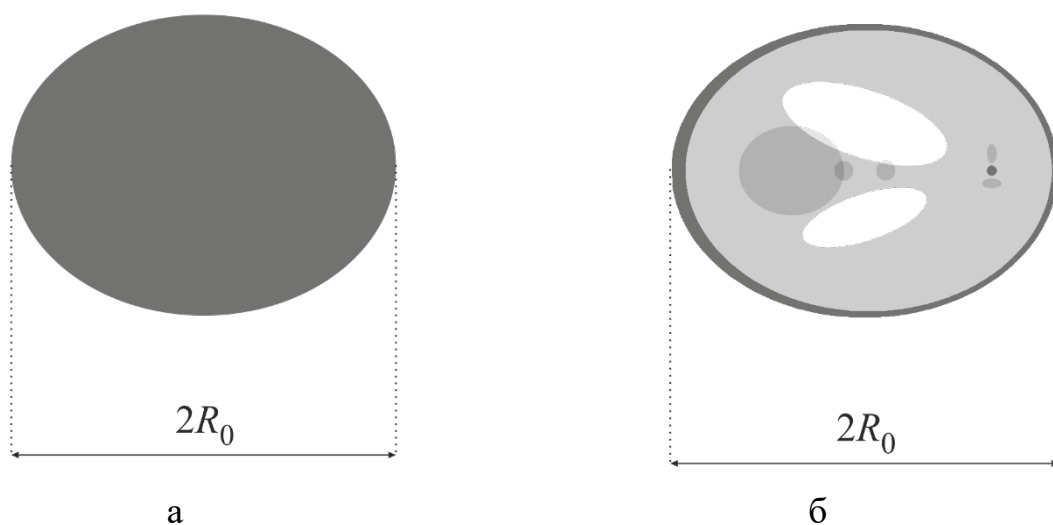


Рис. 3.9. Исследуемые объекты типа "Эллипс" (а) и "Фантом Шеппа-Логана" (б),  $R_0$  – радиус окружности (габариты объекта), в которую вписан исследуемый объект

В качестве критерия точности реконструкции томограммы было выбрано среднеквадратичное отклонение  $D$ , вычисляемое по следующей формуле:

$$D = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (S_{ij} - \tilde{S}_{ij})^2}. \quad (3.1)$$

где  $S_{ij}$  – дискретное представление исходного пространственного распределения  $S(x_i, y_j)$  источников излучения в точке  $(x_i, y_j)$ ,  $\tilde{S}_{ij}$  – дискретная версия реконструированного пространственного распределения

источников излучения  $\tilde{S}(x_i, y_j)$  в точке  $(x_i, y_j)$ ,  $N_x$  – число дискрет вдоль оси  $x$ ,  $N_y$  – число дискрет вдоль оси  $y$ .

При численном моделировании использовалась схема с параллельными проекциями. Размер исходного изображения был 256x256 пикселей. Рабочее поле составляло 800x800 мм. Сглаживание исходного пространственного распределения источников излучения было отключено.

Угол поворота системы томографа между проекциями составлял 2 градуса. При моделировании взаимодействия излучения с веществом учитывалось поглощение и рассеяния излучения. В параметрах коррекции указывались параметры поглощающей и рассеивающей среды, соответствующие воде.

При реконструкции изображения использовался фильтр Ханна с частотой обрезания равной 0,8 относительных единиц. При реконструкции указывались параметры коэффициента поглощения  $\mu_a$  и коэффициента рассеяния  $\mu_s$  воды. На этапе обратного проецирования использовалась линейная интерполяция. Размер реконструированной томограммы составлял 256x256 дискрет.

Сначала было проведено исследование точности реконструкции от габаритов исходного объекта. Во время этого моделирования размеры исходного пространственного распределения источников излучения менялись в диапазоне от 100 мм до 300 мм с шагом 10 мм. Параметры коэффициента экстинкции  $\mu$  были выбраны в соответствии с параметрами воды. Коэффициент поглощения  $\mu_a$  был равен  $0,003 \text{ мм}^{-1}$ , а коэффициент рассеяния  $\mu_s$  был равен  $0,012 \text{ мм}^{-1}$ . Область распределения коэффициентов поглощения и рассеяния была равна области распределения источников излучения.

Зависимости в условных единицах (у.е.), полученные при исследовании влияния габаритов объекта на точность реконструкции объекта, представлены на рис. 3.10. По графикам видно, что с увеличением габаритов объекта наблюдается ухудшение качества томограммы, однако реконструкция с помощью нового метода даёт результаты реконструкции лучше, чем с помощью традиционного метода.

После этого было проведено исследование зависимости точности реконструкции томограммы от коэффициента пропорциональности  $\beta$ . Во время этого исследования коэффициент поглощения  $\mu_a$  был равен  $0,003 \text{ мм}^{-1}$ , а коэффициент пропорциональности  $\beta$  варьировался в диапазоне от 0,2 до 0,8 с шагом 0,1. При этом, также как и при исследовании точности реконструкции от габаритов исходного объекта, область распределения коэффициента экстинкции была соответствовала области распределения источников излучения.

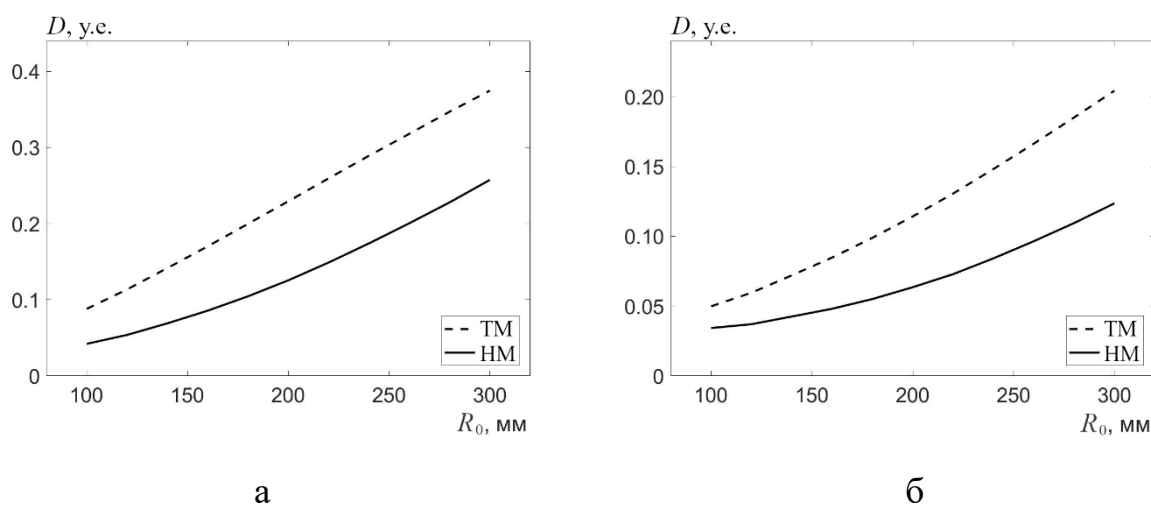


Рис. 3.10. Зависимость среднеквадратичного отклонения  $D$  от габаритов исследуемого объекта  $R_0$  для объектов типа "Эллипс" (а) и "Фантом Шеппа-Логана" (б)

Полученные при исследовании зависимости точности реконструкции томограммы от коэффициента пропорциональности  $\beta$  представлены на рис. 3.11. С увеличением коэффициента рассеяния  $\mu_s$  качество реконструкции начинает ухудшаться, однако новый метод реконструкции даёт результат лучше, чем традиционный метод реконструкции. Преимущество нового метода выражается в лучшей пространственной реконструкции внутри объекта, особенно в части резких переходов между границами областей с разными интенсивностями пространственного распределения источников излучения. Кроме этого, реконструкция новым методом позволяет получить меньшее число артефактов вне объекта.

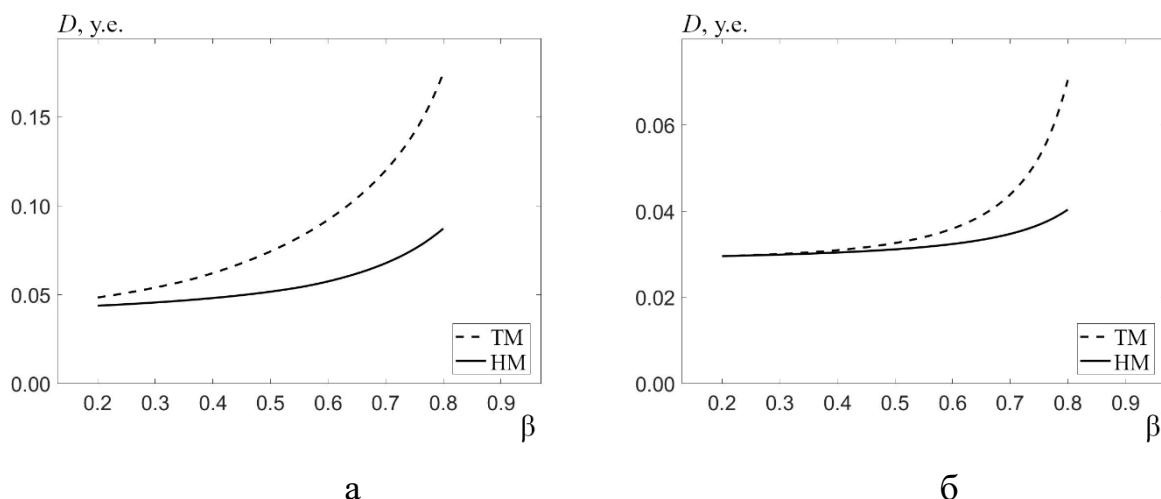


Рис. 3.11. Зависимость среднеквадратичного отклонения  $D$  от коэффициента пропорциональности  $\beta$  для объектов типа "Эллипс" (а) и "Фантом Шеппа-Логана" (б)

Реконструкция изображения, полученная при коэффициенте поглощения  $\mu_a = 0,003 \text{ мм}^{-1}$  и коэффициенте рассеяния  $\mu_s = 0,012 \text{ мм}^{-1}$  (вода) показана на рис. 3.12. На рисунке видно, что новый метод справляется с влиянием рассеяния излучения лучше по сравнению с традиционным. Видно, что на реконструкции с помощью нового метода артефакты вокруг объекта почти отсутствуют по сравнению с традиционным методом. Кроме этого, внутренняя структура объектов визуально лучше различима в новом методе.

В ходе численного моделирования с помощью аналитических формул на основе разработанной программы было установлено, что влияние рассеяния излучения увеличивается с увеличением габаритов объекта, а также при увеличении отношения коэффициента рассеяния к коэффициенту ослабления рассеивающей среды. Во всех случаях новый метод показал существенное улучшение точности реконструкции по сравнению с традиционным, как визуально, так и по критерию среднеквадратичного отклонения.

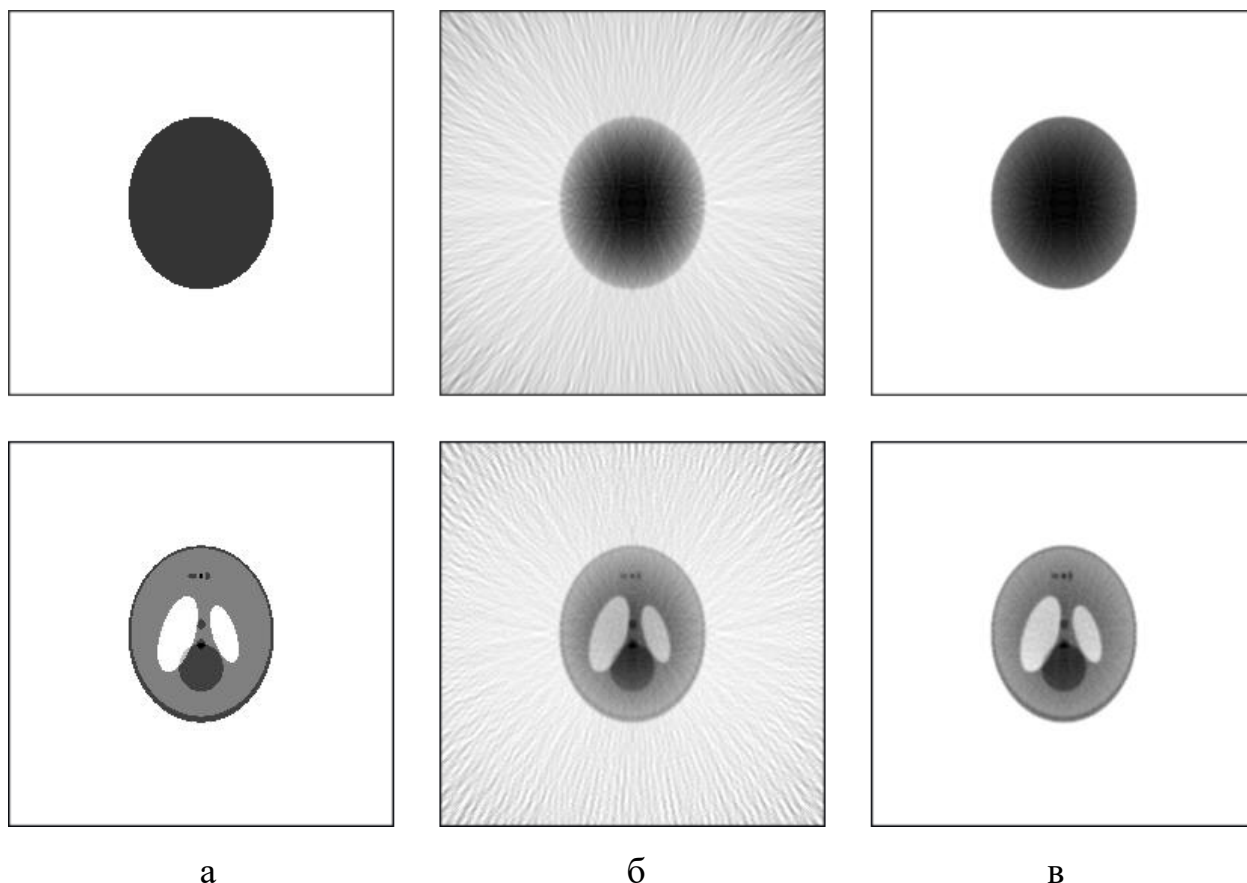


Рис. 3.12. Реконструкция объектов типа "Эллипс" (верхний ряд) и "Фантом Шеппа-Логана" (нижний ряд); исходное пространственное распределение источников излучения (а), реконструкция традиционным методом (б), реконструкция новым методом (в)

### 3.3. Итерационный метод коррекции влияния геометрического ослабления в ОФЭКТ

Как уже было сказано ранее, на показания детектора влияют и другие, дополнительные факторы. Одним из таких факторов является фактор геометрического ослабления. Поскольку от расстояния между детектором и источником зависит количество зарегистрированных фотонов (чем больше расстояние, тем меньше фотонов будет зарегистрировано), то фактор геометрического ослабления определяется телесным углом для каждой точки объекта, в котором фотоны попадают на детектор (рис. 3.13) [6]. Так как в аналитических методах реконструкции точно учесть это влияние невозможно, то влиянием этого фактора как правило пренебрегают. Поэтому исследование

влияния фактора геометрического ослабления на точность реконструкции томограмм и разработка хотя бы приближённого метода коррекции влияния этого фактора представляет теоретический и практический интерес.

Показания детектора  $p_0(\xi, \theta)$  с учётом фактора геометрического ослабления излучения можно записать следующим образом:

$$p_0(\xi, \theta) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{S_\theta(\xi, \zeta)}{(R_1 - \zeta)^2} e^{\mu(L_2 - \zeta)} d\zeta \quad (3.2)$$

где  $R_1$  – радиус вращения ПЧД, а множитель  $\frac{1}{(R_1 - \zeta)^2}$  является фактором геометрического ослабления. Если для реконструкции пространственного распределения источников излучения  $\tilde{S}(x, y)$  использовать обратное экспоненциальное преобразование Радона, то полученная томограмма будет отличаться от истинного распределения  $S(x, y)$  из-за отсутствия учёта фактора геометрического ослабления.

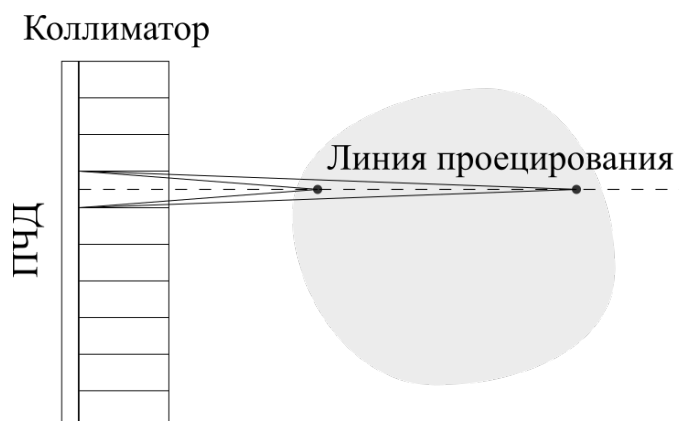


Рис. 3.13. Фактор геометрического ослабления для двух точек, расположенных на одной линии проецирования. Влияние данного фактора пропорционально телесному углу, в котором излучение от элементарного точечного источника попадает на элементарный детектор

Для учёта влияния фактора геометрического ослабления можно применить идею итерационных алгоритмов реконструкции для экспоненциального преобразования Радона. Тогда для итерационного улучшения изображения будет использоваться аналитический метод на



каждом итерационном шаге. Блок-схема предлагаемого интегрально-итерационного алгоритма показана на рис. 3.14а.

В предложенном алгоритме нулевое приближение  $\tilde{S}_0(x, y)$  является реконструкцией, полученной с помощью ОЭПР. После этого вычисляются проекции первого порядка:

$$p_1(\xi, \theta) = \mathfrak{R}_\mu\{\tilde{S}_0(x, y)\} \quad (3.3)$$

с учётом фактора геометрического ослабления. Затем вычисляется добавка к нулевому приближению как разность между начальными проекциями  $p(\xi, \theta)$  и приближенными проекциями  $p_1(\xi, \theta)$ :

$$\Delta S_1(x, y) = \mathfrak{R}_\mu^{-1}\{p(\xi, \theta) - p_1(\xi, \theta)\}. \quad (3.4)$$

Тогда первое приближение вычисляется как

$$S_1(x, y) = S_0(x, y) + \Delta S_1(x, y). \quad (3.5)$$

После этого можно вычислить приближенные проекции второго порядка

$$p_2(\xi, \theta) = \mathfrak{R}_\mu\{\tilde{S}_1(x, y)\}, \quad (3.6)$$

добавку ко второму приближению

$$\Delta S_2(x, y) = \mathfrak{R}_\mu^{-1}\{p(\xi, \theta) - p_2(\xi, \theta)\} \quad (3.7)$$

и второе приближение

$$S_2(x, y) = S_1(x, y) + \Delta S_2(x, y). \quad (3.8)$$

В качестве критерия остановки итерационного процесса можно использовать изменение выбранного критерия отклонения между предыдущей и текущей итерацией.

Для ускорения процесса сходимости итерационного процесса можно использовать идею корректирующей матрицы. Такой подход использовался до появления обратного экспоненциального преобразования Радона при коррекции влияния поглощения излучения [75]. В случае с фактором геометрического ослабления каждый элемент корректирующей матрицы

характеризует искажения, вызванные этим фактором для каждого пикселя реконструированного изображения. Блок-схема интегрально-итерационного алгоритма с корректирующей матрицей показана на рис. 3.14б.

Для получения корректирующей матрицы необходимо рассмотреть реконструкцию точечного источника излучения единичной интенсивности. Пусть точечный источник излучения расположен в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда исходное распределение источников излучения можно записать как

$$S_0(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (3.9)$$

где  $\delta(\bullet)$  – дельта-функция Дирака. Тогда проекционные данные с учётом фактора геометрического ослабления вычисляются следующим образом:

$$p(\xi, \theta) = \frac{\delta(\xi - \xi_\theta^2)}{(R_1 - \zeta_\theta)^2} e^{\mu\zeta_\theta}, \quad (3.10)$$

где  $\zeta_\theta = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta$ . В то же время без учёта фактора геометрического ослабления проекционные данные вычисляются по следующей формуле:

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \frac{\delta(\xi - \xi_\theta^2)}{R_1^2} e^{\mu\zeta_\theta}. \quad (3.11)$$

Для реконструкции методом фильтрованных обратных проекций с функцией фильтра  $h_1(\xi)$  получается следующее выражение для реконструированного распределения источников излучения в точке  $(x_0, y_0)$  с учётом фактора геометрического ослабления:

$$S(x_0, y_0) = h_1(0) \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mu\zeta_\theta}}{(R_1 - \zeta_\theta)^2} d\theta \quad (3.12)$$

и без учёта фактора геометрического ослабления:

$$\tilde{S}(x_0, y_0) = h_1(0) \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mu\zeta_\theta}}{R_1^2} d\theta. \quad (3.13)$$

Тогда элемент корректирующей матрицы в точке  $(x_0, y_0)$  можно задать следующим образом:

$$c(x_0, y_0) = \frac{\tilde{S}(x_0, y_0)}{S(x_0, y_0)}. \quad (3.14)$$

В этом случае для произвольной точки  $(x_0, y_0)$  корректирующая матрица определяется следующим выражением:

$$c(x_0, y_0) = \frac{1}{R_1^2} \sum_{i=1}^N e^{\mu \zeta_{\theta_i}} / \sum_{i=1}^N \frac{e^{\mu \zeta_{\theta_i}}}{(R_1 - \zeta_{\theta_i})^2}. \quad (3.15)$$

Тогда, в соответствии с итерационным алгоритмом, представленном на рис. 3.14, элементы нулевого приближения  $\tilde{S}_0(x, y)$ , реконструированного с помощью ОЭПР, умножаются на элементы корректирующей матрицы  $c(x, y)$  вычисленные по формуле (3.15):

$$\tilde{S}_0(x, y) = c(x, y) \mathfrak{R}_\mu^{-1}\{p(\xi, \theta)\}. \quad (3.16)$$

Затем вычисляются приближённые проекции первого порядка с учётом фактора геометрического ослабления:

$$p_1(\xi, \theta) = \mathfrak{R}_\mu\{\tilde{S}_0(x, y)\}. \quad (3.17)$$

После этого вычисляется добавка к нулевому приближению как разность между исходными  $p(\xi, \theta)$  и приближёнными проекциями  $p_1(\xi, \theta)$ :

$$\Delta S_1(x, y) = c(x, y) \mathfrak{R}_\mu^{-1}\{p(\xi, \theta) - p_1(\xi, \theta)\}, \quad (3.18)$$

а затем первое приближение:

$$S_1(x, y) = S_0(x, y) + \Delta S_1(x, y). \quad (3.19)$$

Далее можно вычислить приближённые проекции второго порядка

$$p_2(\xi, \theta) = \mathfrak{R}_\mu\{\tilde{S}_1(x, y)\}, \quad (3.20)$$

добавку второго порядка

$$\Delta S_2(x, y) = c(x, y) \mathfrak{R}_\mu^{-1}\{p(\xi, \theta) - p_2(\xi, \theta)\}, \quad (3.21)$$

и второе приближение

$$S_2(x, y) = S_1(x, y) + \Delta S_2(x, y). \quad (3.22)$$

Аналогичный метод итерационного улучшения алгоритма может быть применён не только в ОФЭКТ, но и в ПЭТ [76, 77]. Для исследования влияния фактора геометрического ослабления на точность реконструкции пространственного распределения источников излучения использовались два типа распределений (рис. 3.15):

- объект типа "Диск";
- объект типа "Фантом Шеппа-Логана".

При проведении численного моделирования проводилось сравнение для реконструкций, полученной на основе проекционных данных с влиянием фактора геометрического ослабления и без учёта этого фактора. При учёте фактора геометрического ослабления проекции вычислялись по формуле 3.10, а при пренебрежении фактором геометрического ослабления проекции вычислялись по формуле 3.11.

В качестве критерия точности реконструкции томограмм был выбран критерий равномерного отклонения  $U$ :

$$U = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |S_{ij} - \tilde{S}_{ij}|}. \quad (3.23)$$

Фактор геометрического ослабления зависит от отношения  $R_1/R_0$ , где  $R_1$  – радиус вращения плоского ПЧД. На рис. 3.16 показаны зависимости

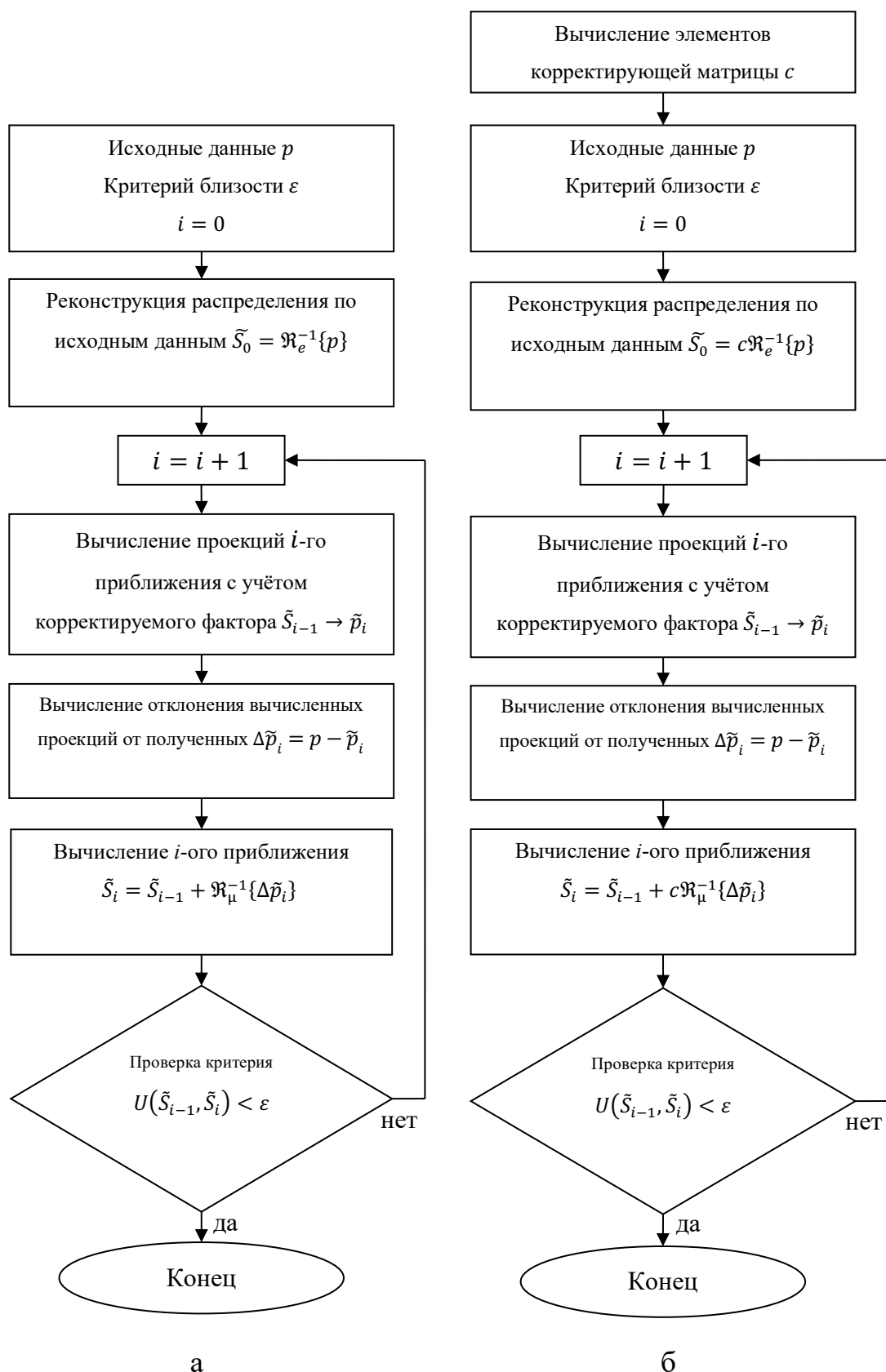


Рис. 3.14. Блок-схема интегрально-итерационного алгоритма реконструкции (а) и блок-схема интегрально-итерационного алгоритма реконструкции с корректирующей матрицей (б)

точности реконструкции по равномерному критерию отклонения  $U$  для объекта типа "Диск" и на рис. 3.17 для объекта типа "Фантом Шеппа-Логана". На основе полученных зависимостей можно сделать вывод о том, что влияние фактора геометрического ослабления увеличивается с ростом отношения радиуса  $R_1/R_0$ . При этом влияние фактора геометрического ослабления выражается сильнее для объектов с простой структурой ("Диск"), по сравнению с объектами со сложной структурой ("Фантом Шеппа-Логана"). Для коэффициента поглощения  $\mu = 0,015 \text{ мм}^{-1}$  и отношения радиусов  $R_1/R_0 = 1,5$  точность реконструкции простого объекта в 1,04 раза лучше по сравнению с реконструкцией сложного объекта, а при  $R_1/R_0 = 3,0$  лучше в 1,65 раза. Такой же результат был получен и при численном моделировании проекционных данных в отсутствие влияния фактора геометрического ослабления. При добавлении фактора геометрического ослабления в проекционные данные точность реконструкции при  $R_1/R_0 = 1,5$  ухудшается в 5,7 раз для простого объекта, а для сложного объекта только в 2,0 раза. Кроме этого, точность реконструкции ухудшается с ростом значения коэффициента поглощения  $\mu$ .

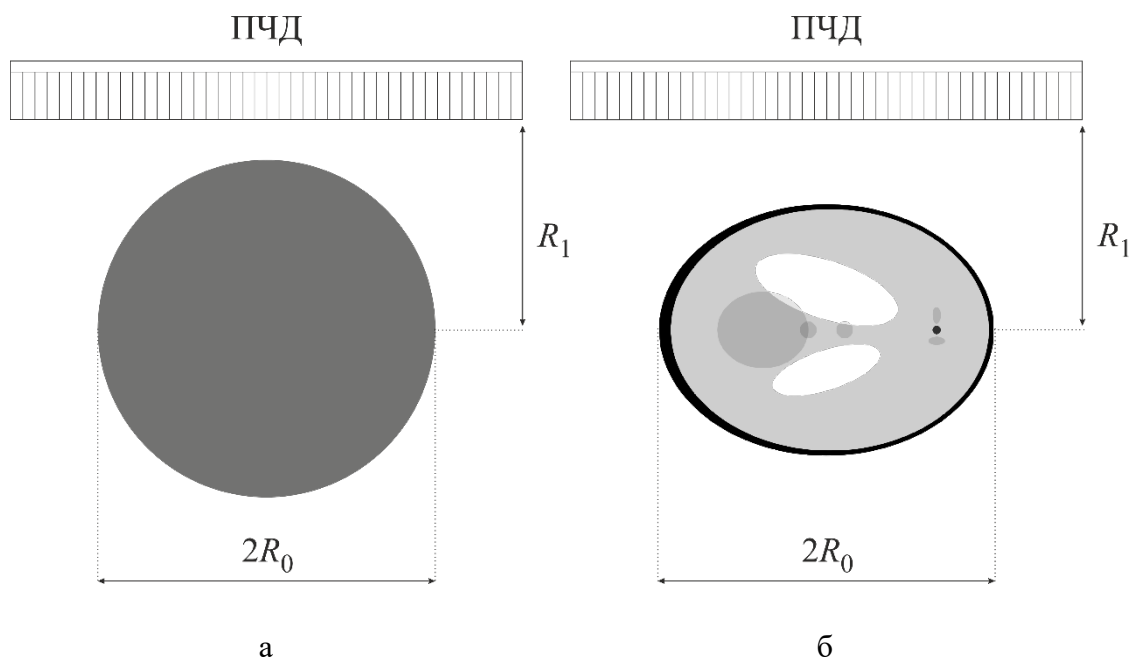


Рис. 3.15. Исследуемые объекты типа "Диск" и "Фантом Шеппа-Логана"

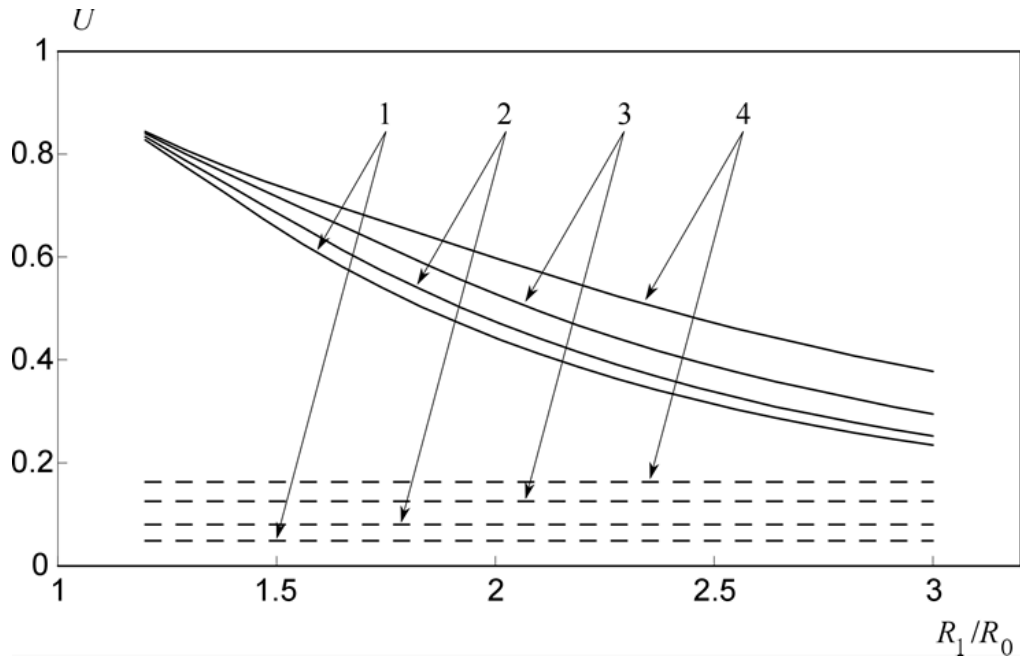


Рис. 3.16. Зависимость точности реконструкции  $U$  от отношения  $R_1/R_0$  для объекта типа "Диск", пунктирная линия – реконструкция без фактора геометрического ослабления при  $\mu = 0,005 \text{ мм}^{-1}$  (1),  $\mu = 0,01 \text{ мм}^{-1}$  (2),  $\mu = 0,015 \text{ мм}^{-1}$  (3),  $\mu = 0,02 \text{ мм}^{-1}$  (4)

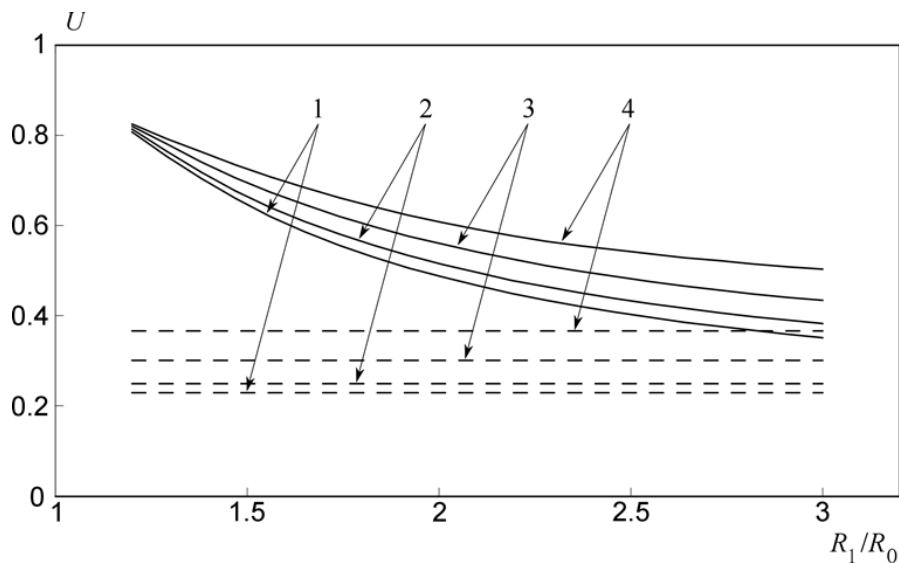


Рис. 3.17. Зависимость точности реконструкции  $U$  от отношения  $R_1/R_0$  для объекта типа "Фантом Шеппа-Логана", пунктирная линия – реконструкция без фактора геометрического ослабления при  $\mu = 0,005 \text{ мм}^{-1}$  (1),  $\mu = 0,01 \text{ мм}^{-1}$  (2),  $\mu = 0,015 \text{ мм}^{-1}$  (3),  $\mu = 0,02 \text{ мм}^{-1}$  (4)

Таким образом, можно сделать вывод, что влияние фактора геометрического ослабления на точность реконструкции томограмм является

существенным. В связи с этим, поиск метода уменьшения влияния этого искажающего фактора является актуальной задачей. Для исследования эффективности предложенных алгоритмов коррекции влияния фактора геометрического ослабления без корректирующей матрицы и с корректирующей матрицей (рис. 3.14) моделирование проводилось для отношения радиусов  $R_1/R_0 = 1,5$  и следующих значений коэффициента ослабления:  $\mu = 0,005 \text{ мм}^{-1}$ ,  $\mu = 0,01 \text{ мм}^{-1}$ ,  $\mu = 0,015 \text{ мм}^{-1}$ ,  $\mu = 0,02 \text{ мм}^{-1}$ .

Полученные зависимости точности реконструкции томограмм от числа итераций представлены на рис. 3.18, 3.19. Полученные значения для критерия равномерного отклонения  $U$  представлены в табл. 3.2.

Фактор геометрического ослабления ухудшает точность реконструкции в зависимости от коэффициента поглощения излучения примерно в 2 раза для простого объекта типа "Диск" и в 3-10 раз для сложного объекта типа "Фантом Шеппа-Логана" (нулевая итерация). Для объекта типа "Диск" после пяти шагов итерационного алгоритма без коррекционной матрицы наблюдается улучшение точности реконструкции томограммы в 7-23 раз, а после десяти итераций в 28-58 раз. Для объекта типа "Фантом Шеппа-Логана" после пяти шагов итерационного алгоритма без коррекционной матрицы наблюдается улучшение точности реконструкции томограммы в 3-4 раза, а после десяти итераций в 4-5 раз. При этом использование коррекционной матрицы дополнительно увеличивает скорость сходимости итерационного алгоритма. По зависимостям, представленных на рис. 3.18, 3.19 видно, что процесс улучшения томограмм практически полностью останавливается после 5-10 итераций для простого объекта, а для сложного объекта после 3-6 итераций в зависимости значения от коэффициента поглощения. Стоит отметить то, что в [75] аналогичная остановка происходила после трёх-четырёх итераций.

При этом на последних шагах итерации значение критерия точности реконструкции  $U$  становится меньше, чем для проекций, полученных без учёта фактора геометрического ослабления. Кроме этого, критерий отклонения  $U$



стремится к определённому значению независимо от коэффициента поглощения.

Таким образом, точность реконструкции томограмм при учёте фактора геометрического ослабления улучшается при уменьшении габаритов объекта и ухудшается при увеличении радиуса вращения ПЧД. При этом влияние фактора геометрического ослабления сильнее для объектов с простой внутренней структурой по сравнению с объектами, имеющих более сложную структуру. Помимо этого, точность реконструкции пространственного распределения источников излучения также уменьшается из-за неполного учёта процесса поглощения излучения внутри объекта.

Табл. 3.2. Результаты итерационного процесса

$\mu, \text{мм}^{-1}$	Диск				ФШЛ			
	0,005	0,010	0,015	0,020	0,005	0,010	0,015	0,020
$U_0^{(-)}$	0,229	0,250	0,301	0,366	0,048	0,080	0,126	0,162
$U_0^{(+)}$	0,443	0,474	0,528	0,597	0,487	0,515	0,560	0,608
$U_0^{(+)} / U_0^{(-)}$	1,9	1,9	1,8	1,6	10,1	6,4	4,5	3,7
$U_5^{(+)}$	0,019	0,024	0,040	0,084	0,140	0,139	0,139	0,142
$U_0^{(+)} / U_5^{(+)}$	23,5	19,7	13,2	7,1	3,5	3,7	4,0	4,3
$U_5^{(+;cm)}$	0,009	0,011	0,016	0,033	0,133	0,137	0,140	0,142
$U_0^{(+)} / U_5^{(+;cm)}$	48,1	41,6	33,0	18,3	3,7	3,8	4,0	4,3
$U_{10}^{(+)}$	0,008	0,009	0,013	0,021	0,122	0,123	0,124	0,125
$U_0^{(+)} / U_{10}^{(+)}$	58,3	51,5	42,0	28,2	4,0	4,2	4,5	4,9
$U_{10}^{(+;cm)}$	0,008	0,010	0,013	0,018	0,116	0,121	0,126	0,132
$U_0^{(+)} / U_{10}^{(+;cm)}$	56,8	48,9	40,6	33,0	4,2	4,3	4,5	4,6

Примечание:

$U_0^{(-)}$  – начальное значение критерия  $U$  без влияния фактора геометрического ослабления;

$U_0^{(+)}$  – начальное значение критерия  $U$  с учётом влияния фактора геометрического ослабления;

$U_5^{(+)}$  – значение критерия  $U$  после пяти шагов итерационного процесса без коррекционной матрицы;

$U_5^{(+;cm)}$  – значение критерия  $U$  после пяти шагов итерационного процесса с коррекционной матрицей;

$U_{10}^{(+)}$  – значение критерия  $U$  после десяти шагов итерационного процесса без коррекционной матрицы;

$U_{10}^{(+;cm)}$  – значение критерия  $U$  после десяти шагов итерационного процесса с коррекционной матрицей.

Применение предложенного метода коррекции фактора геометрического ослабления позволяет улучшить точность реконструкции по критерию равномерного отклонения  $U$ . Точность реконструкции значительно улучшается уже после пяти итерационных шагов. При этом дополнительно можно использовать коррекционную матрицу для ускорения процесса сходимости итерационного алгоритма.

Отдельного внимания заслуживает тот факт, что в результате значение критерия отклонения  $U$  становится меньше, чем в случае пренебрежения фактором геометрического ослабления при моделировании проекционных данных. По-видимому, это связано с тем, что итерационный алгоритм корректирует не только погрешности, связанные с фактором геометрического ослабления, а также корректирует другие погрешности реализации аналитического алгоритма реконструкции: погрешности дискретизации, погрешности регуляризации некорректности обратной задачи и другие.

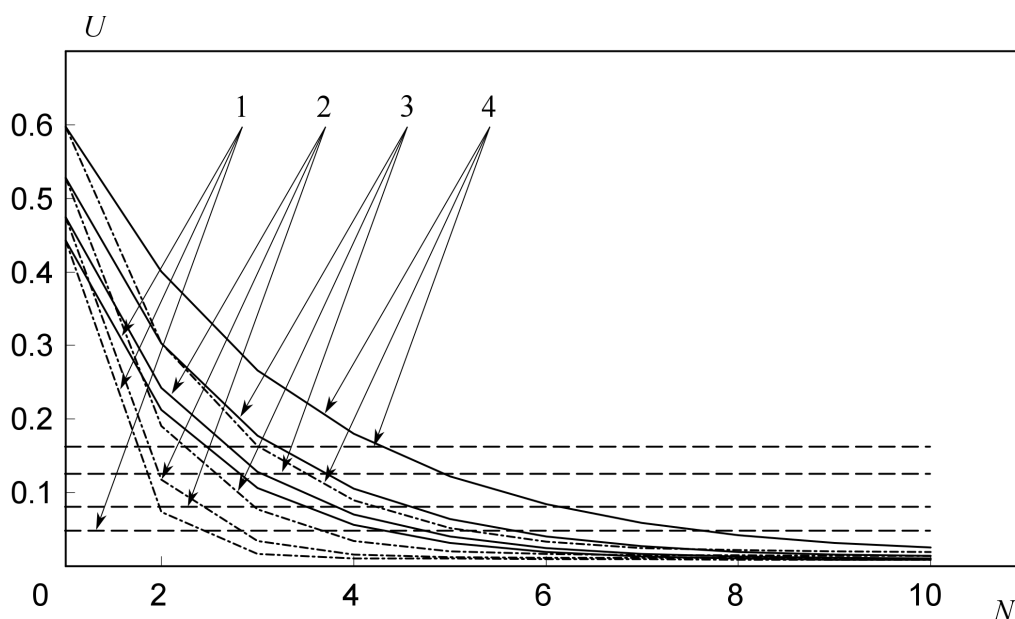


Рис. 3.18. Зависимость равномерного отклонения от числа итераций корректирующего алгоритма в ОФЭКТ для распределения типа "Диск" при  $\mu = 0,005 \text{ мм}^{-1}$  (1),  $\mu = 0,01 \text{ мм}^{-1}$  (2),  $\mu = 0,015 \text{ мм}^{-1}$  (3),  $\mu = 0,02 \text{ мм}^{-1}$  (4). Сплошная линия – значение равномерного отклонения в отсутствие фактора геометрического ослабления, пунктирная линия – алгоритм коррекции без коррекционной матрицы, штрихпунктирная линия – алгоритм коррекции с коррекционной матрицей

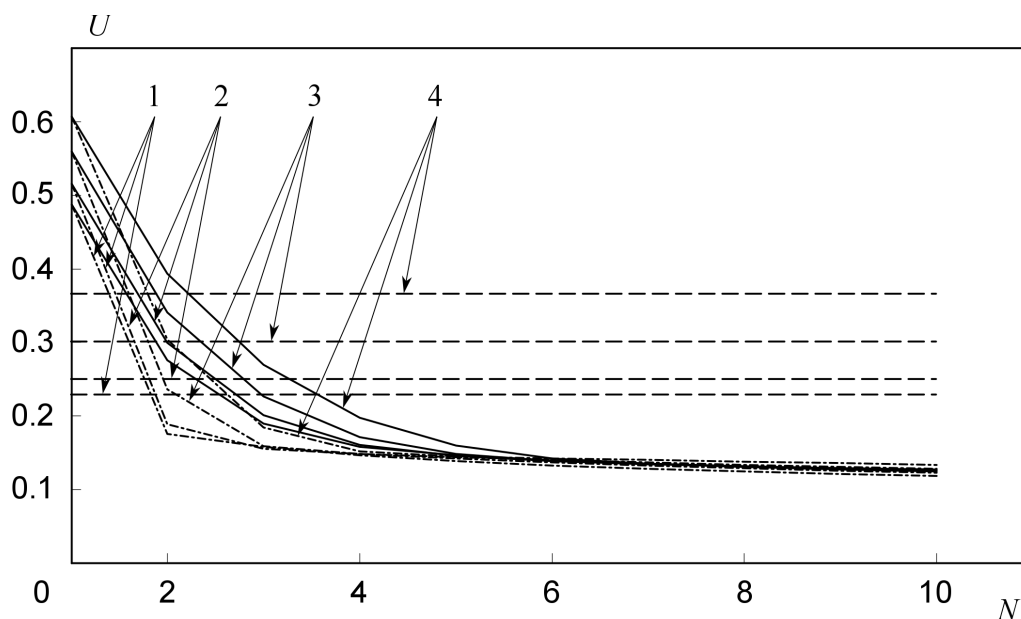


Рис. 3.19. Зависимость равномерного отклонения от числа итераций корректирующего алгоритма в ОФЭКТ для распределения типа "Фантом Шеппа-Логана" при  $\mu = 0,005 \text{ мм}^{-1}$  (1),  $\mu = 0,01 \text{ мм}^{-1}$  (2),  $\mu = 0,015 \text{ мм}^{-1}$  (3),  $\mu = 0,02 \text{ мм}^{-1}$  (4). Сплошная линия – значение равномерного отклонения в отсутствие фактора геометрического ослабления, пунктирная линия – алгоритм коррекции без коррекционной матрицы, штрихпунктирная линия – алгоритм коррекции с коррекционной матрицей

### 3.4. Выводы

1. Разработана программа численного моделирования ОФЭКТ в РПН-среде, которая позволяет производить быстрое вычисление проекционных данных на основе аналитических формул для РПН-среды и осуществлять реконструкцию пространственного распределения источников излучения на основе точного решения обратной томографической задачи для РПН-среды.

2. Получены зависимости критерия среднеквадратичного отклонения реконструированного изображения от истинного от габаритов объекта и отношения коэффициента рассеяния к коэффициенту ослабления.

3. Установлено, что точность реконструкции томограмм уменьшается с увеличением габаритов объекта и отношения коэффициента рассеяния к коэффициенту ослабления. При этом для объекта со сложной внутренней структурой (объект типа "Фантом Шеппа-Логана") наблюдается более медленный рост критерия среднеквадратичного отклонения по сравнению с объектом с простой внутренней структурой (объект типа "Эллипс").

4. Проведено сравнение предложенного метода реконструкции и традиционного. Во всех случаях новый метод демонстрирует существенное преимущество над традиционным методом реконструкции, что выражается не только в меньшем значении критерия среднеквадратичного отклонения, но и в лучшей визуальной различимости деталей томограммы.

5. Исследовано геометрическое ослабление в ОФЭКТ. Показано, что геометрическое ослабление в ОФЭКТ существенно влияет на точность реконструкции пространственного распределения источников излучения. Предложен итерационный метод коррекции геометрического ослабления, который существенно улучшает точность реконструкции по критерию равномерного отклонения восстановленного распределения источников излучения от истинного. При этом точность реконструкции томограммы значительно улучшается уже после пяти итераций. Вариант предложенного метода с использованием коррекционной матрицы дополнительно улучшает скорость сходимости итерационного алгоритма.

Основные результаты, полученные в главе 3, опубликованы в [78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86] [87, 88, 89, 90, 91].

## Глава 4. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ на основе моделирования проекций методом Монте-Карло

### 4.1. Ядерно-физическая система Geant4 для моделирования прохождения излучения через вещество в эмиссионной томографии методом Монте-Карло

Для верификации результатов, полученных с помощью численного моделирования на основе аналитических формул, было решено использовать метод Монте-Карло для моделирования прохождения излучения через вещество. Основным преимуществом метода Монте-Карло над аналитическим моделированием является практически полное соответствие моделируемых данных с данными, получаемыми при проведении натурального эксперимента [73]. Более того, метод Монте-Карло позволяет получить информацию, которую невозможно получить при проведении реального эксперимента. К такой информации относится информация о траектории движения каждого гамма-кванта.

Перед проведением численного моделирования было рассмотрено несколько подходов, включающих в себя написание собственного алгоритма, использование программ узкой специализации (SimSET, Eidolon) и программ общего назначения (Geant4, EGS4, MCNP). Из всех рассмотренных вариантов было решено остановиться на ядерно-физической системе Geant4. Она представляет собой инструментарий для численного моделирования прохождения элементарных частиц через вещество с помощью метода Монте-Карло. Данный инструментарий написан на языке C++, и его разработка ведётся с 1998 года по настоящее время в Европейской организации по ядерным исследованиям (ЦЕРН).

Geant4 является многосторонним программным обеспечением, позволяющим проводить моделирования в различных областях наук: от медицинской физики до высокоэнергетической астрофизики. Главным преимуществом этого программного обеспечения является возможность создания сложных геометрических моделей, состоящих из множества

различных фигур и материалов. Кроме этого, Geant4 позволяет выбрать различные процессы взаимодействия излучения с веществом, среди которых находится фотоэлектрический эффект (поглощение излучения), комптоновское рассеяние, рэлеевское рассеяние, тормозное излучение, множественное рассеяние и многие другие [73, 92, 93].

Основная структура Geant4 содержит 17 главных категорий. Связь между этими категориями представлена на рис. 4.1. В основании инструментария лежит категория «глобальная», которая содержит единицы измерения, константы, а также управляет процессом генерации случайных чисел. С помощью категорий «материалы», «частицы», «графическое представление» и «геометрия» определяют пространственную форму детектора, а также перемещение частиц внутри модели исследуемого фантома.

Категория «интерком» позволяет взаимодействовать пользователям с ПО через графический интерфейс и независимыми между собой модулями. Кроме этого, «интерком» служит абстрактным интерфейсом для плагинов (дополнения, которые расширяют функционал Geant4).

Категория «путь» содержит инструменты для работы с траекториями и элементарными шагами внутри них. Эта категория используется категорией «процессы», которая осуществляет реализацию различных моделей взаимодействий излучения с веществом. Категория «транспортировщик» управляет процессом перемещения частиц внутри фантома и позволяет вызывать параметризацию процессов. Все эти категории вызываются другой категорией, «трекинг», которая осуществляет контроль их вклада в путь частицы, а также передает эту информацию чувствительным детекторам для их оцифровки.

Категория «событие» осуществляет запись всех событий по пути частиц, а категория «пробег» собирает эти события в коллекции событий детекторов. Категория «считывание» позволяет управлять полученными от пробегов данными. Последними категориями являются «визуализация», «постоянство» и «графический интерфейс». «Визуализация» позволяет осуществлять

визуализацию текущего состояния моделирования. «Постоянство» отвечает за существование выбранных объектов после завершения работы программы, чтобы другие программы могли работать с ними. «Графический интерфейс» позволяет создавать пользовательский интерфейс для работы с Geant4.

Таким образом, Geant4 представляет все необходимые аспекты для моделирования прохождения элементарных частиц через вещество: определение геометрии и материалов объектов, взаимодействие частиц с веществом, управление процессом прохождения частиц через вещество, оцифровка полученных результатов, сбор информации о событиях и путях частиц, визуализацию и графический интерфейс. Графический интерфейс главного окна Geant4 представлен на рис. 4.2.

Кроме графического интерфейса, моделированием прохождения излучения через вещество может осуществляться с помощью макросов. Geant4 имеет как программные C++ интерфейсы, так и свой собственный язык макросов. С его помощью можно делать всё то же самое, что и с помощью программы на C++ [73, 92, 93].

#### 4.2. Программный пакет Geant4 Application for Tomographic Emission (GATE)

Поскольку численное моделирование с помощью Geant4 является довольно сложным процессом, т.к. он состоит из множества различных классов, для моделирования методом Монте-Карло было решено использовать GATE (Geant4 Application for Tomographic Emission) [94, 95, 96]. Данное программное обеспечение является плагином для Geant4 и упрощает процесс моделирования прохождения и взаимодействия излучения с веществом, предоставляя дополнительные инструменты для работы. Среди этих инструментов находится расширенный язык макросов, который существенно упрощает описание геометрии системы томографа, радиоактивного распада вещества и многое другое. GATE изначально разрабатывался для моделирования эмиссионной томографии (ОФЭКТ и ПЭТ), однако с его помощью можно также проводить численное моделирование для компьютерной и оптической томографий.



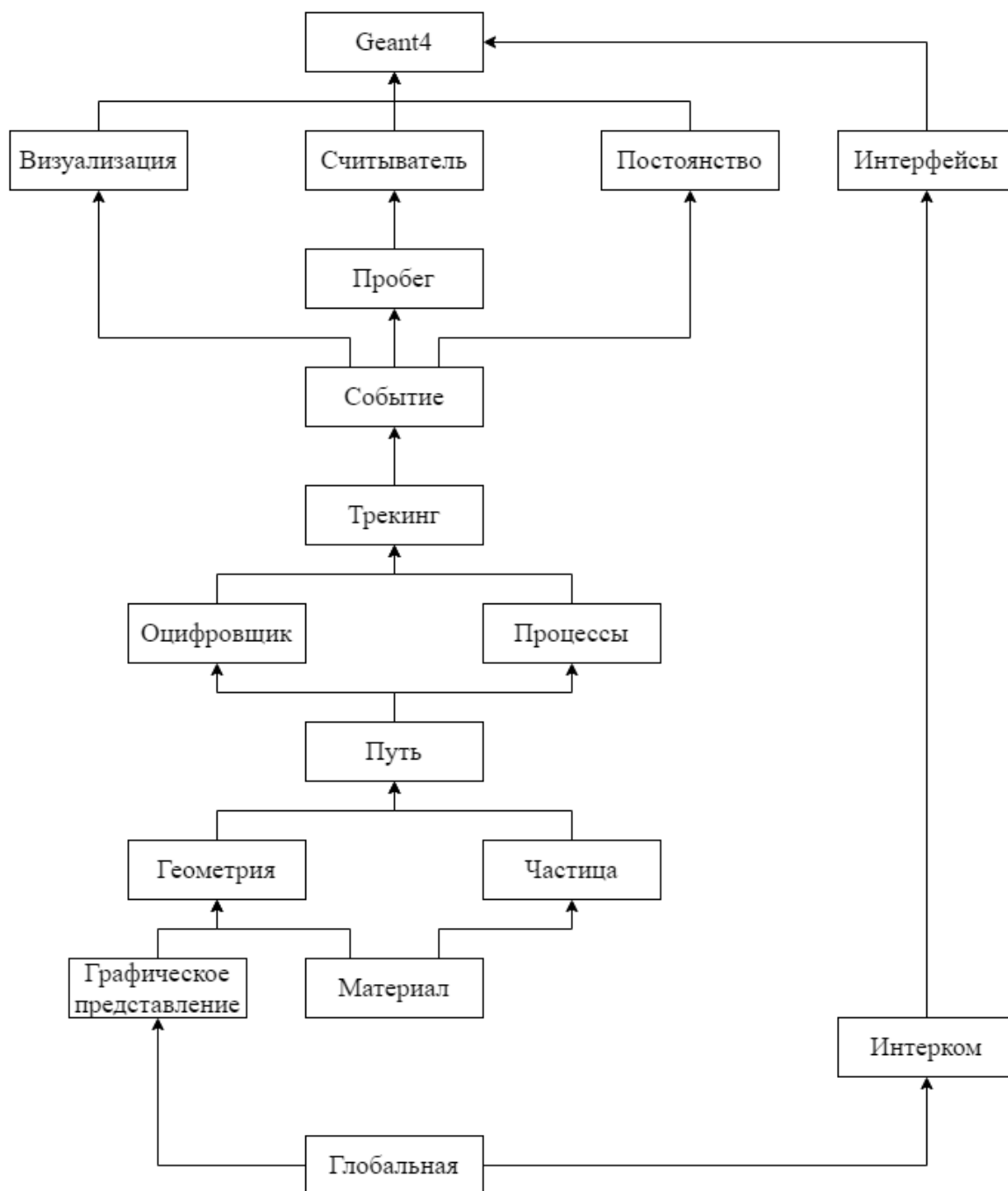


Рис. 4.1. Связь категорий Geant4

Проведения моделирования в GATE делится на восемь шагов: определение геометрии детекторов, установка параметров исследуемого фантома, выбор моделей физических взаимодействий излучения с веществом, инициализация моделирования, настройка параметров детектора и оцифровки, установка параметров пространственного распределения источников

излучения, выбор формата выходных данных и запуск моделирования. Блок-схема работы с GATE показана на рис. 4.3.

На первом шаге задаётся геометрия детекторов. Сначала подключается база данных материалов, в которой содержится описание всех используемых веществ и композитов (материал, состоящий из нескольких веществ в указанных пропорциях). Затем нужно задать объём, в котором будет проходить моделирование. Такой объём в GATE называется миром. Все частицы, которые выходят за пределы мира, выбывают из процесса моделирования.

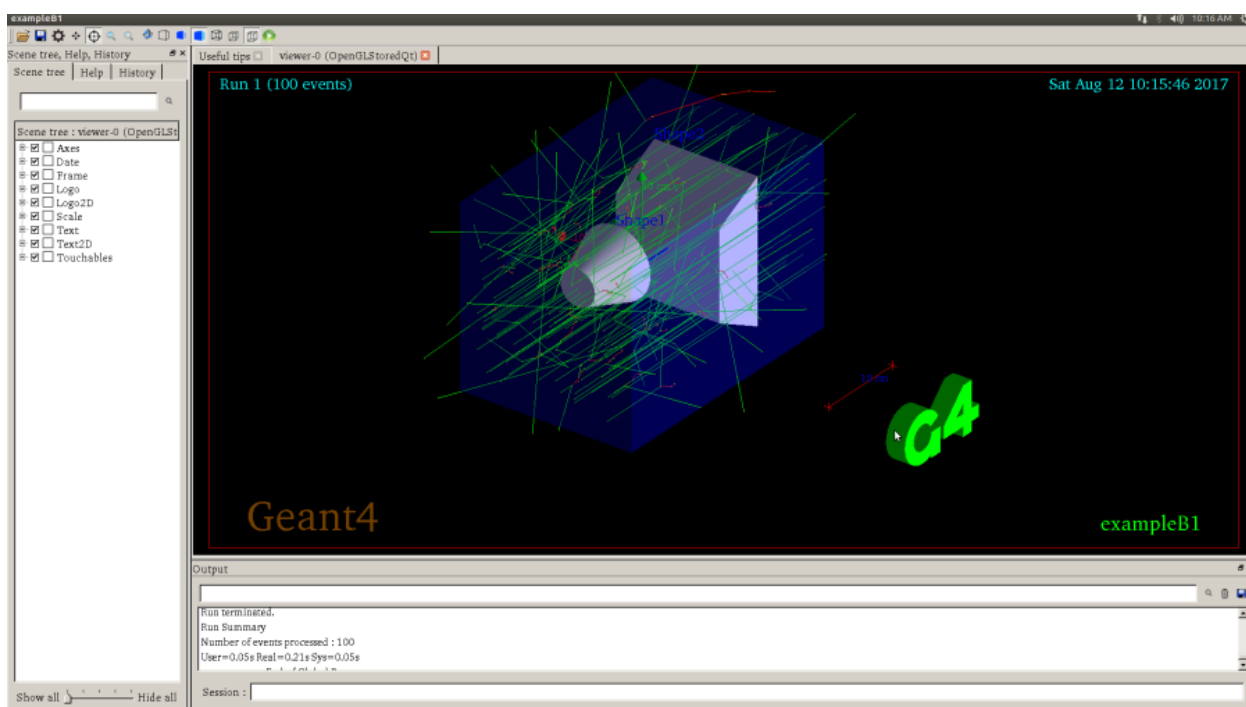


Рис. 4.2. Графический интерфейс ядерно-физической системы Geant4

Сложный объект можно задать как набор элементарных объектов-примитивов. Для задания объекта-примитива нужно указать его форму, размер и материал, из которого он состоит. К поддерживаемым формам объектов-примитивов GATE относятся куб, параллелепипед, сфера, цилиндр, конус, эллипсоид, гексагон, клин и некоторые другие. Для многократного применения объектов-примитивов, отличающихся между собой положением в пространстве, GATE имеет несколько вариантов повторителей. Для повторения объектов-примитивов вдоль прямой линии используется линейный повторитель. Для повторения объектов-примитивов вдоль кольца

используется кольцевой повторитель. Также имеются двумерные и трёхмерные повторители.

После того, как выбрана форма объекта, нужно задать положение объекта в пространстве в виде смещения объекта от центра и угла поворота относительно центра объекта. Дополнительно GATE поддерживает возможность перемещения и вращения положения объекта в пространстве с течением времени.

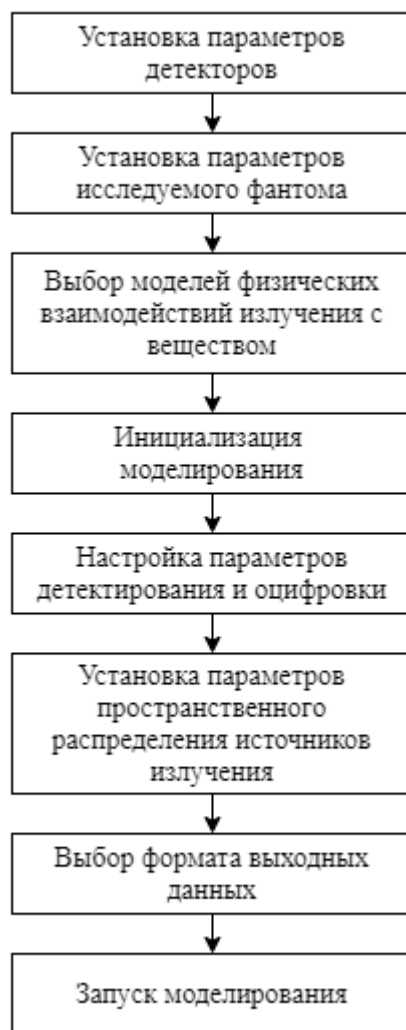


Рис. 4.3. Блок-схема последовательности проведения численного моделирования в GATE

Таким образом в GATE можно создать сколь угодно сложную систему детекторов для моделируемого томографа. Для проверки полученной системы имеются вспомогательные команды, которые позволяют визуализировать моделируемую конфигурацию. Тогда, после построения геометрии можно

отобразить полученную систему детектирования на экран. Пример визуализации системы показан на рис. 4.4.

На втором шаге задаются параметры исследуемого фантома. Для этого, также как на первом шаге, задаётся объём фантома, который можно задать с помощью аналитического вида или в виде воксельного фантома. Для установки воксельного фантома GATE поддерживает пять форматов файлов: ASCII, Interfile, Analyze, MetaImage и DICOM. Выбор материала объекта осуществляется на основе базы данных материалов. В базе данных, идущих в комплекте с GATE, находятся химические элементы, композиты и смеси. Элементы задаются с помощью имени элемента, символа обозначения, атомного номера и молярной массы.

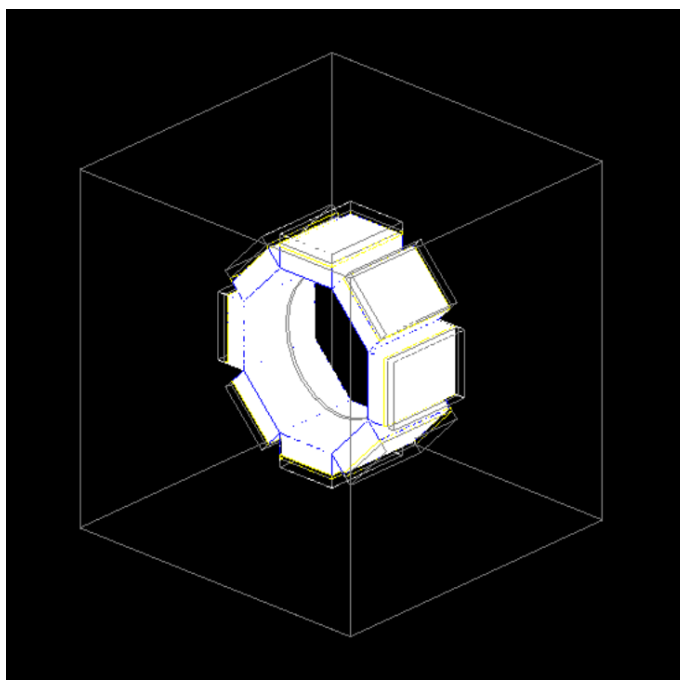


Рис. 4.4. Система детектирования в ОФЭКТ. Внешний куб, нарисованный серыми линиями, представляет собой моделируемый объём мира, белым цветом обозначены коллиматоры, жёлтым кристалл и серым стекло

Композиты описываются как элементы, из которых они сделаны. Сначала у композита указываются параметры вещества, такие как плотность, количество элементов, из которых состоит композит и состояние вещества (твёрдое, жидкое, газ). Затем идёт перечисление элементов, из которых состоит композит и их соотношение в долевом соотношении. Смеси задаются

так же, как и композиты, с одним лишь отличием – у них указывается не доля каждого элемента в веществе, а их массовое соотношение.

Третьим шагом в процессе описания моделируемого эксперимента является выбор физических взаимодействий излучения с веществом. Доступные физические взаимодействия делятся на три категории: электромагнитные процессы, адронные процессы и оптические процессы.

Для электромагнитных процессов возможен учёт следующих взаимодействий: фотоэлектрическое поглощение, комптоновское рассеяние, рэлеевское рассеяние, образование пар, ионизация, тормозное излучение, аннигиляция позитронов и электронов, единственное и множественное рассеяние; для адронных процессов: упругое рассеяние протонов и нейтронов, неупругое рассеяние для протонов, нейтронов, пионов, ионов, распад частиц и радиоактивный распад вещества; для оптических процессов: фотоэлектрическое поглощение, рэлеевское рассеяние, мю-рассеяние, граничные процессы и волновой сдвиг при флюоресценции.

После того, как задана геометрия детекторов, задан исследуемый фантом и выбраны модели физических взаимодействий излучения с веществом, нужно провести инициализацию моделирования. После этой операции нельзя добавлять новые объекты и изменять параметры физических взаимодействий.

На пятом этапе задаются параметры модели детектора. Основными данными, которые собирает GATE, являются события взаимодействия элементарных частиц с позиционно-чувствительным детектором. При каждом столкновении система записывает информацию о времени, месте и энергии этого события. Для упрощения работы с переводом информации о столкновениях в показания детектора имеется специальный инструмент, который называется оцифровщиком.

Оцифровщик представляет цепочку модулей, каждый из которых определяет те или иные параметры детектора. Всего GATE поддерживает 20 различных модулей, восемь из которых используются в эмиссионной томографии: сумматор, пространственное размытие, размытие по

энергетическому спектру, верхнее энергетическое окно, нижнее энергетическое окно, временное разрешение, шум и мёртвое время детектора. Сумматор осуществляет суммирование всех событий регистрации фотонов на детекторе. Размытие по энергетическому спектру осуществляет размытие энергии для регистрируемого фотона. Верхнее энергетическое окно позволяет исключить фотоны, энергия которых выше выбранного значения энергии. Нижнее энергетическое окно исключает фотоны, чья энергия ниже указанного значения. Временное разрешение определяет точность определения времени регистрации фотона. Шум позволяет промоделировать шум от электроники томографа или сцинтилляторов, что также оказывает влияние на число зарегистрированных фотонов. Модуль мёртвого времени детектора задает минимальное время, которое должно пройти между двумя актами регистрации фотона, чтобы событие было зарегистрировано. Пример цепочки модулей оцифровщика представлен на рис. 4.5.

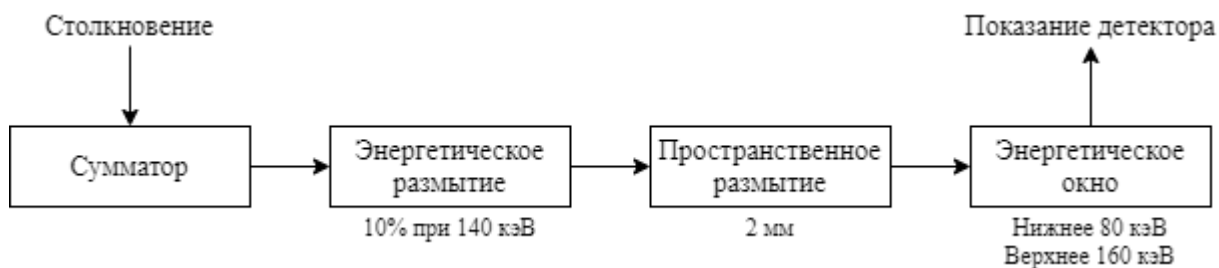


Рис. 4.5. Пример цепочки модулей оцифровщика

После установки параметров оцифровщика задаются параметры пространственного распределения источников излучения. На этом этапе задаётся форма источника, его расположение, тип источника, энергия и движение. Также как и при описании формы объектов, на этом этапе можно использовать аналитический и воксельный формат описания пространственного распределения источников излучения. Однако для аналитического формата источника GATE имеет другой набор форм: круг (диск), кольцо, эллипс, квадрат, прямоугольник, сфера, эллипсоид, цилиндр и параллелепипед.

При описании расположения источника излучения в пространстве можно задать как постоянное расположение, так и меняющееся в пространстве со временем. Для этого имеются команды установки координат объекта в мире и его перемещения в пространстве вместе с указанным объектом.

Затем указывается тип моделируемой энергии испускаемых частиц (моноэнергетический, линейный, экспоненциальный и многие другие). Для установки типа источника можно задать атомный номер, атомарный вес, ионный заряд и энергия возбуждения. Кроме этого, можно воспользоваться уже встроенными типами источников: гамма частицы, электроны, позитроны, аннигилированные фотоны и некоторые другие. Затем указывается активность источника излучения, для которой можно так же задать параметры её изменения с течением времени.

Следующим шагом в процессе работы с GATE является выбор формата выходных данных. GATE поддерживается несколько форматов, среди которых ASCII файлы, ROOT файлы и List Mode Format (LMF) файлы.

На последнем, восьмом этапе, задаются параметры моделирования (сбора данных) и запускается сам процесс моделирования. На этом этапе указывается количество разыгрываемых частиц за всё моделирование, на одно сечение или же задать разное число частиц для каждого сечения. После этого задаются время измерения на одно сечение, время начала и конца моделирования. Также на этом шаге задается используемый генератор случайных чисел и его начальное значение. Последним действием на этом этапе является запуск моделирования. После этого программа начинает сам процесс моделирование прохождения элементарных частиц через вещество.

После проведения численного моделирования GATE отображает траектории, если был включен режим визуализации траекторий. Графический интерфейс GATE и результат визуализации траекторий показаны на рис. 4.6 (зеленым цветом показаны траектории фотонов) [94].

Для обработки полученных данных была написана программа на языке Python, которая переводит показания детекторов из формата ROOT в

синограмму и сохраняет её в mat-файл для последующей обработки в MatLab. Для реконструкции и анализа полученного изображения была разработана дополнительная программа на языке MatLab. Интерфейс программы представлен на рисунке 4.7.

Разработанная программа состоит из двух блоков: панели управления и результатов реконструкции. Панель управления состоит из четырёх частей: кнопки «открыть файл», панели реконструкции, панели выбора сечения и панели отображения критерия отклонения реконструкции от исходного распределения исходного пространственного распределения источников излучения.

При нажатии на кнопку «открыть файл» открывается меню выбора файла с жёсткого диска. В данном окне будут отображаться только файлы, содержащие результаты моделирования. После выбора файла начнётся процесс реконструкции томограммы по параметрам, указанным в разделе «Реконструкция». В этом разделе задаётся коэффициент поглощения  $\mu_a$  в  $\text{мм}^{-1}$ , коэффициент рассеяния  $\mu_s$  в  $\text{мм}^{-1}$ , вид фильтра в Фурье-пространстве (Рамачандрана и Лакшминараянана, косинусный, Ханна, Хэмминга или Шеппа-Логана), вид интерполяции на этапе обратного проецирования (линейная или ближайшего соседа) и частота обрезания. При нажатии на кнопку «обновить» производится новая реконструкция с новыми параметрами.

Раздел «Сечение» содержит панель управления выбором текущего сечения. Здесь можно выбрать тип сечения – горизонтальное или вертикальное, а также задать дискрету сечения с помощью окна ввода или с помощью кнопок «+» и «-». Кроме этого, программа поддерживает указание сечения с помощью нажатия кнопки мыши на реконструированном изображении.

В разделе «Критерии» отображается текущее значение критерия среднеквадратичного отклонения для всего объекта целиком (об.) и выбранного сечения (сеч.). При изменении дискрету сечения этот раздел



автоматически обновляется, показывая новые значения для выбранного сечения.

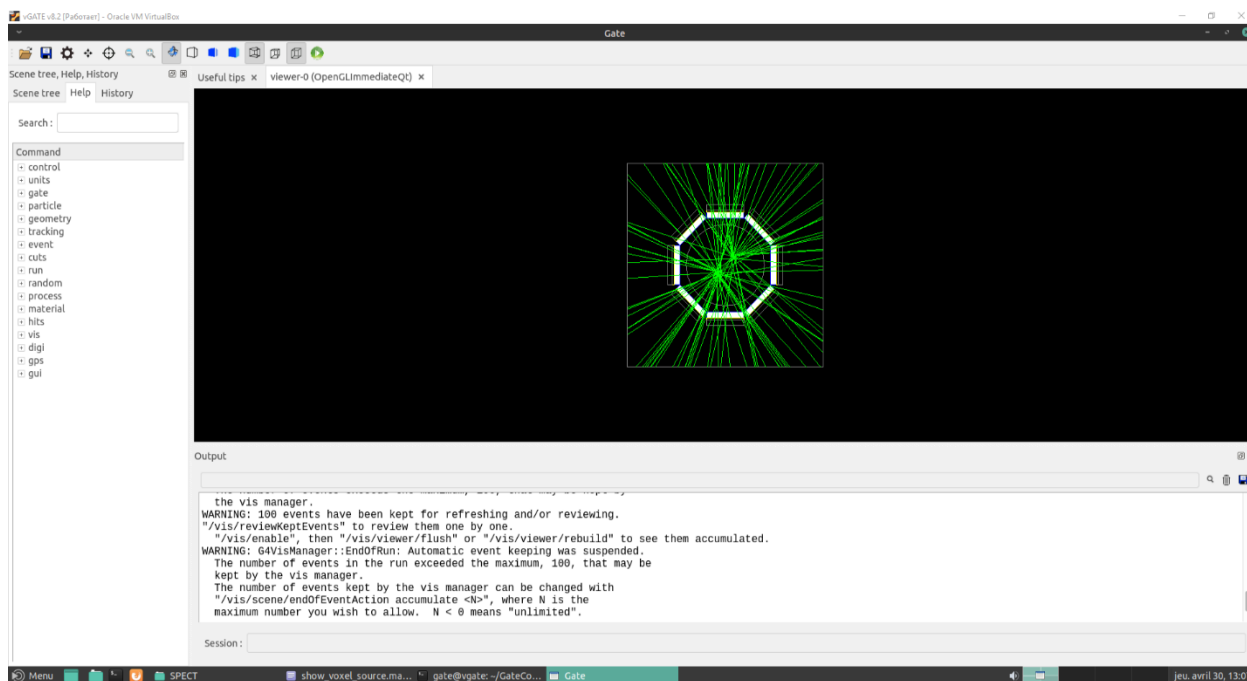


Рис. 4.6. Графический интерфейс GATE и результат моделирования для воксельного источника излучения, состоящего из двух эллипсов

В блоке отображения результатов реконструкции отображаются четыре изображения: в верхнем ряду строятся исходное изображение (слева), томограмма, полученная с помощью традиционного метода (по центру) и нового метода (справа). На этих трёх изображениях с помощью цветной линии выделяется текущее сечение (чёрная для исходного, зелёная для традиционного метода, синяя для нового метода). Внизу отображаются текущие сечения для изображений. Пример работы программы показан на рис. 4.7.

### 4.3. Исследование точности реконструкции в ОФЭКТ на основе моделирования проекций методом Монте-Карло

При численном моделировании прохождения излучения через вещество методом Монте-Карло была выбрана система, состоящая из 8 детекторных сборок. Формой детекторной сборки являлся параллелепипед с высотой 9,5 см,

длиной 19 см и шириной 28 см. Каждая детекторная сборка состояла из трёх частей: коллиматор, кристалл детектора и корпус (экранирование).

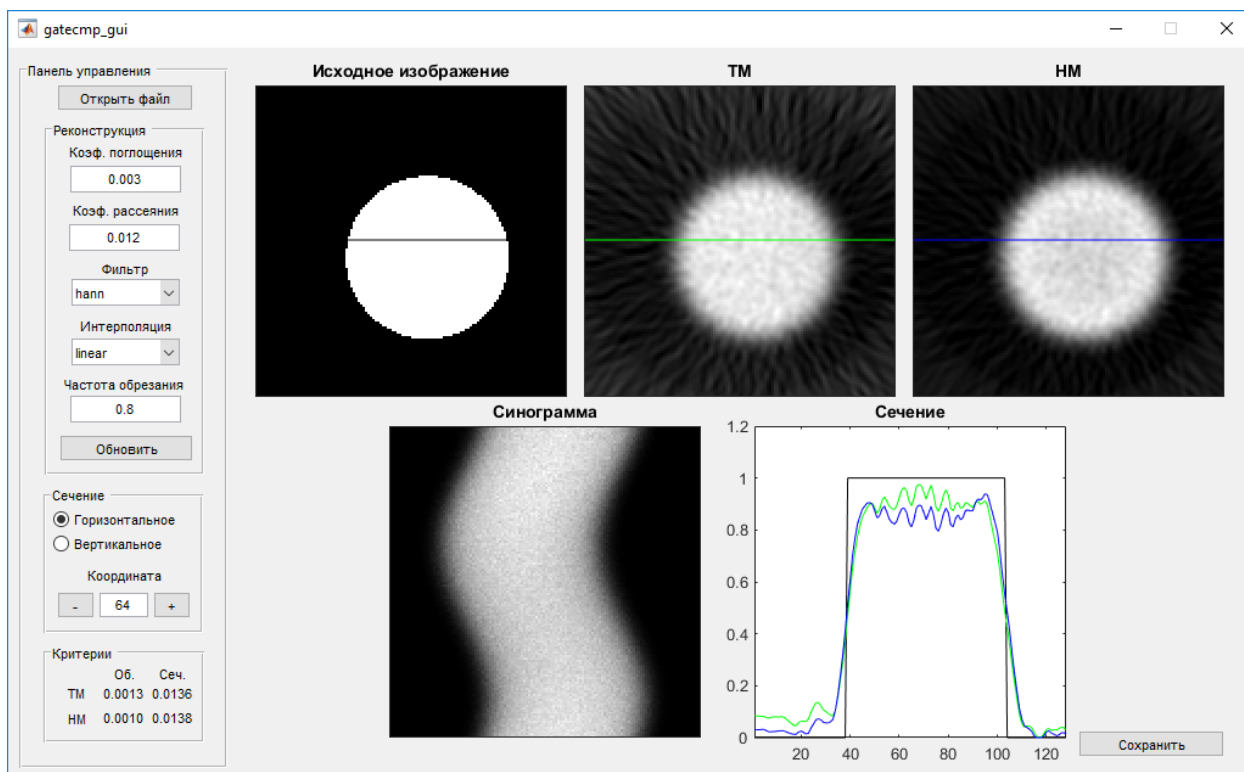


Рис. 4.7. Интерфейс программы реконструкции и анализа томограммы по результатам работы программы моделирования прохождения излучения через вещество с помощью метода Монте-Карло

Коллиматор представлял собой параллелепипед высотой 6 см, длиной 19 см и шириной 28 см. Материалом коллиматора был свинец. При этом он был смещён на -1,75 см от центра детекторной сборки вдоль оси  $x$ . Канал коллиматора представлял собой правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиусом 1,5 мм и длиной 6 см. Всего у коллиматора было 4576 отверстий, которые были расположены в шахматном порядке, состоящего из двух рядов, каждый из которых содержал по 2288 каналов. Между рядами каналов был сдвиг 1,8 мм по оси  $y$  и 3,12 мм по оси  $z$ . Внутри самих рядов каналы коллиматора были расположены на расстоянии 3,6 мм друг от друга по оси  $y$  и 6,24 мм по оси  $z$ .

Кристалл детекторной сборки имеет форму параллелепипеда, высота которого составляла 1 см, длина 19 см и ширина 28 см. Кристалл был смещён

от центра детекторной сборки на 1,75 см вдоль оси  $x$ . Материалом кристалла был йодид натрия (NaI). Экранирование было сделано так же из параллелепипеда, высота которого составляла 2,5 см, длина 19 см и ширина 28 см. Корпус был смещён от центра детекторной сборки на 3,5 см вдоль оси  $x$ . В качестве экранирующего материала было выбрано стекло.

Изображение детекторной сборки моделируемой системы томографа представлено на рис. 4.8. При этом детекторные сборки расположены под углом 45 градусов между соседними сборками. Каждая из детекторных сборок была смещена на 27,8 см по оси  $x$  от начала координат. Изображение моделируемой системы томографа представлено на рис. 4.6.

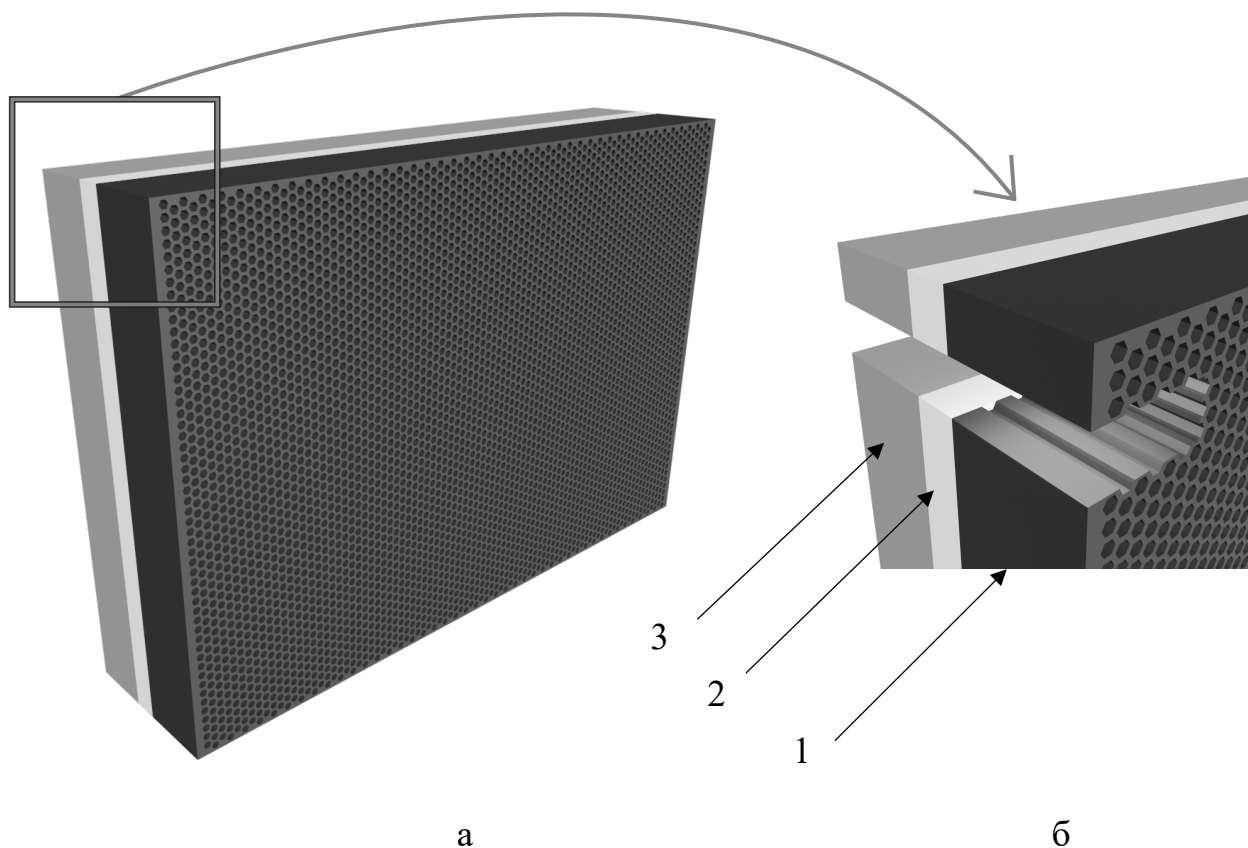


Рис. 4.8. Детектирующий блок (а) и его фрагмент (б): 1 – коллиматор, 2 – сцинтиллятор, 3 – экран (стекло)

При моделировании учитывались следующие физические взаимодействия излучения с веществом: фотоэлектрический эффект (поглощение), комптоновское и рэлеевское рассеяние излучения, ионизация электронов, тормозное излучение и множественное рассеяние излучения.

Параметры кристалла были описаны следующей цепочкой модулей оцифровщика: сумматора, энергетического размытия в 10% от энергии в 140 кэВ, пространственного размытия в 2 мм, нижнего энергетического окна в 80 кэВ и верхнего энергетического окна в 160 кэВ.

На первом этапе проводилось исследование влияния рассеяния излучения в зависимости от материала фантома. Для этого было выбрано цилиндрическое пространственное распределение источников излучения  $^{99m}\text{Tc}$  с энергией гамма-квантов 140,5 кэВ и толщиной 1 мм с сечениями в виде диска. Источники излучения были погружены в тринадцать различных рассеивающих сред, каждая из которых была толщиной 4 см. В качестве рассеивающих сред использовались следующие вещества: литий, натрий, калий, вода, бериллий, магний, бор, кальций, углерод, сера, кремний, алюминий и чёрный фосфор. Параметры этих рассеивающих сред показаны в табл. 4.1 [97]. При этом исследуемый объект был смещён на 1 см от оси вращения с целью уменьшения эффекта кольцевых артефактов для радиально-симметричных объектов.

Табл. 4.1. Параметры поглощающей и рассеивающей среды

№	Рассеивающая среда	Коэффициент поглощения $\mu_a, \text{см}^{-1}$	Коэффициент рассеяния $\mu_s, \text{см}^{-1}$	Коэффициент ослабления $\mu, \text{см}^{-1}$
1	Вакуум	0,0000	0,0000	0,0000
2	Li	0,0000	0,0618	0,0618
3	Na	0,0025	0,1256	0,1282
4	K	0,0175	0,1189	0,1364
5	H <sub>2</sub> O	0,0007	0,1498	0,1505
6	Be	0,0001	0,2201	0,2202
7	Mg	0,0066	0,2357	0,2423
8	B	0,0003	0,2585	0,2588
9	Ca	0,0388	0,2207	0,2595
10	C	0,0006	0,2823	0,2829
11	S	0,0223	0,2789	0,3012
12	Si	0,0158	0,3201	0,3359
13	Al	0,0135	0,3586	0,3721
14	P	0,0230	0,3623	0,3852

Примечание: P – чёрный фосфор.

Для каждой проекции детекторная сборка поворачивалась на 2,5 градуса до тех пор, пока каждая из сборок не пройдёт 45 градусов. Таким образом происходило снятие проекционных данных для полного круга в 360 градусов. Для получения проекций каждого фантома были смоделированы  $\sim 5 \cdot 10^7$  траекторий квантов. Время измерения одной проекции составляло 5 секунд виртуального времени. Полное время снятия всех проекций составляло 90 секунд виртуального времени. Полученные синопграммы для воды, серы и фосфора показаны на рис. 4.9. Для остальных веществ были получены похожие результаты.

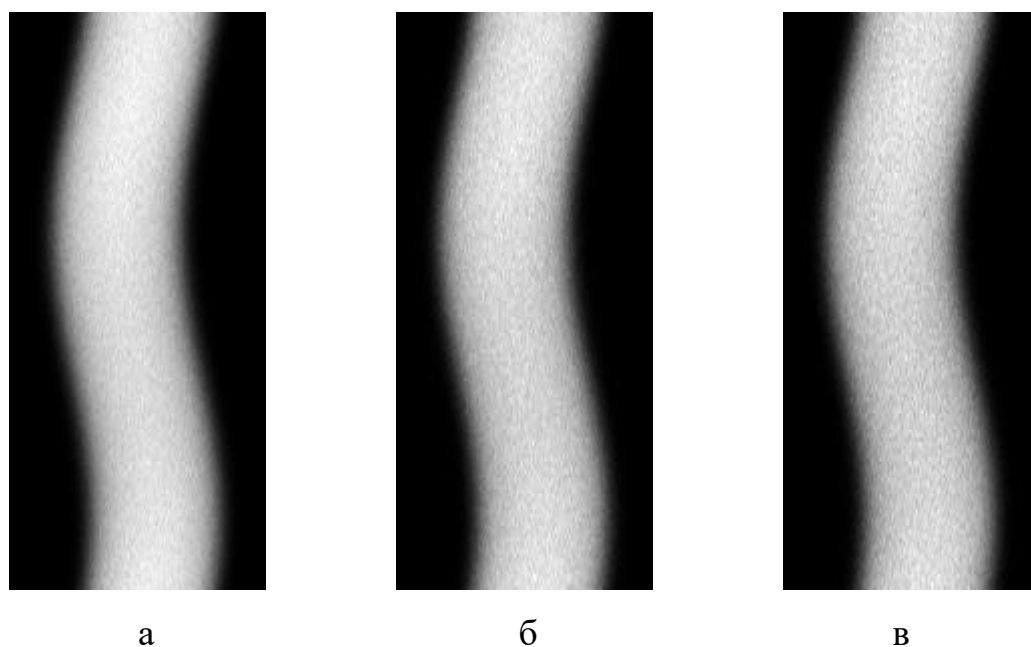


Рис. 4.9. Измеренные проекционные данные для воды (а), серы (б) и фосфора (в)

Реконструкция пространственного распределения источников излучения производилась по 144 измеренным ракурсам. Поле реконструкции составляло пространство с областью 190 x 190 мм. Это поле было дискретизировано на 128 x 128 пикселей, размер одного пикселя составлял 1,5 x 1,5 мм. В качестве фильтрующей функции на этапе фильтрации проекций использовался фильтр Ханна. Относительная частота обрезания в фильтре составляла 0,8 относительных единиц. При обратном проецировании использовалась линейная интерполяция.

В качестве критерия точности реконструкции томограмм было выбрано квадратическое отклонение, вычисляемое по следующей формуле:

$$D = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (S_{ij} - \tilde{S}_{ij})^2}. \quad (4.1)$$

Полученные значения критерия среднеквадратичного отклонения  $D$  представлены в табл. 4.2.

Табл. 4.2. Значения критерия среднеквадратичного отклонения  $D$  для всего объекта и  $D'$  для сечений 1 и 2

Рассеивающая среда	Объект в целом		Сечение 1		Сечение 2	
	ОЭПР	РПН	ОЭПР	РПН	ОЭПР	РПН
Вакуум	15,40	15,40	1,52	1,52	1,66	1,66
Li	16,51	15,16	1,67	1,58	1,79	1,59
Na	20,73	15,74	2,00	1,55	2,26	1,70
K	19,39	15,90	1,78	1,69	1,95	1,70
H <sub>2</sub> O	20,50	15,69	1,78	1,75	1,95	1,66
Be	28,41	16,34	2,23	1,94	2,28	1,72
Mg	33,39	16,44	2,21	1,84	2,39	1,75
B	37,78	16,84	2,26	1,95	2,49	1,79
Ca	38,08	19,38	2,38	1,86	2,46	1,85
C	41,89	17,64	3,17	2,16	3,08	1,85
S	44,13	18,30	4,28	1,83	3,98	1,83
Si	49,29	17,51	5,57	1,69	5,13	1,73
Al	53,92	17,72	6,10	1,90	5,57	1,80
P	54,97	19,23	6,42	1,85	5,85	1,89

Результаты реконструкции исследуемых пространственных распределений источников излучения показаны на рис. 4.10 (вода), рис. 4.11 (сера) и рис. 4.12 (фосфор). Поскольку для остальных веществ визуально были получены аналогичные результаты, то их результаты реконструкции в виде изображений не представлены. На каждом из рисунков представлены реконструкция с помощью традиционного метода и нового метода, а также сечения в профилях 1 и 2 для каждого из методов реконструкции. У изображений сечений по оси абсцисс указан номер пикселя, а по оси ординат

указана относительная интенсивность. При этом относительная интенсивность указана с нормировкой на максимум по всему изображению. Таким образом, максимальное значение по оси ординат может не достигаться на некоторых профилях, так как относительный максимум всегда равен 255.

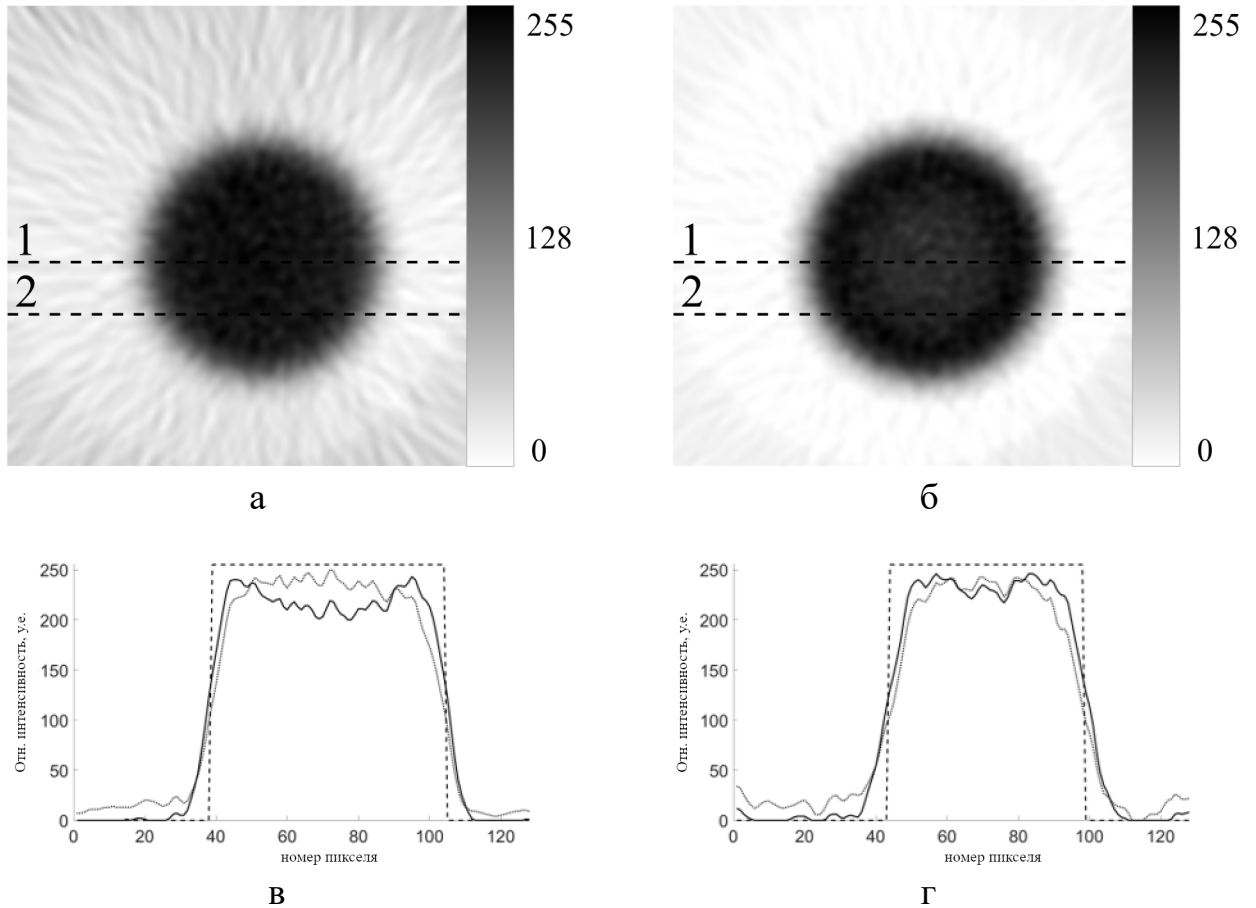


Рис. 4.10. Реконструированные томограммы распределения источников излучения в воде: а – с помощью традиционного метода; б – с помощью нового метода; в – сечение по линии 1; г – сечение по линии 2. Истинное распределение источников излучения, реконструированное с помощью традиционного метода и с помощью нового метода показаны пунктирной, штриховой и сплошной линиями, соответственно

Для реконструкции в средах с небольшим значением коэффициента ослабления, таких как вода, видно, что реконструкция новым методом имеет значительно меньшую амплитуду артефактов вне распределения источников излучения. Кроме этого, значение критерия среднеквадратичного отклонения  $D$  в новом методе меньше, чем при реконструкции с помощью традиционного

метода, как для всего объекта целиком, так и для каждого из профилей по отдельности.

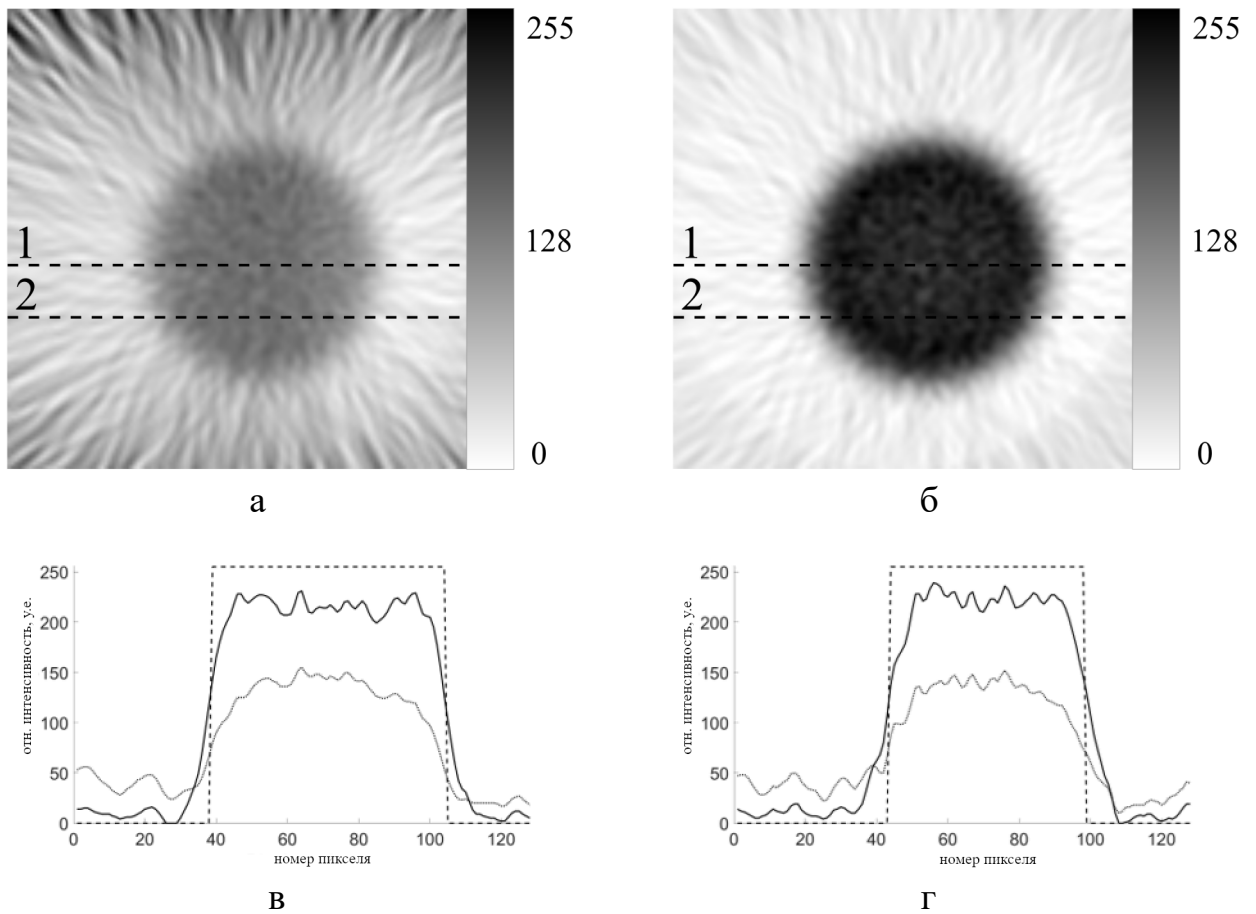


Рис. 4.11. Реконструированные томограммы распределения источников излучения в сере: а – с помощью традиционного метода; б – нового метода; в – сечение по линии 1; г – сечение по линии 2. Истинное распределение источников излучения, реконструированное с помощью традиционного и нового метода показаны пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно

Для реконструкции в среде со средним значением коэффициента ослабления (такая как сера), преимущество предлагаемого метода становится более заметным. Это выражается не только в уменьшении интенсивности артефактов вне объекта, но и в лучшей визуальной различимости деталей внутри объекта. В то время как в реконструкции с помощью традиционного метода пространственное распределение источников излучения начинает



сливаться с артефактами вокруг объекта, в новом методе чётко видно границы пространственного распределения источников излучения.

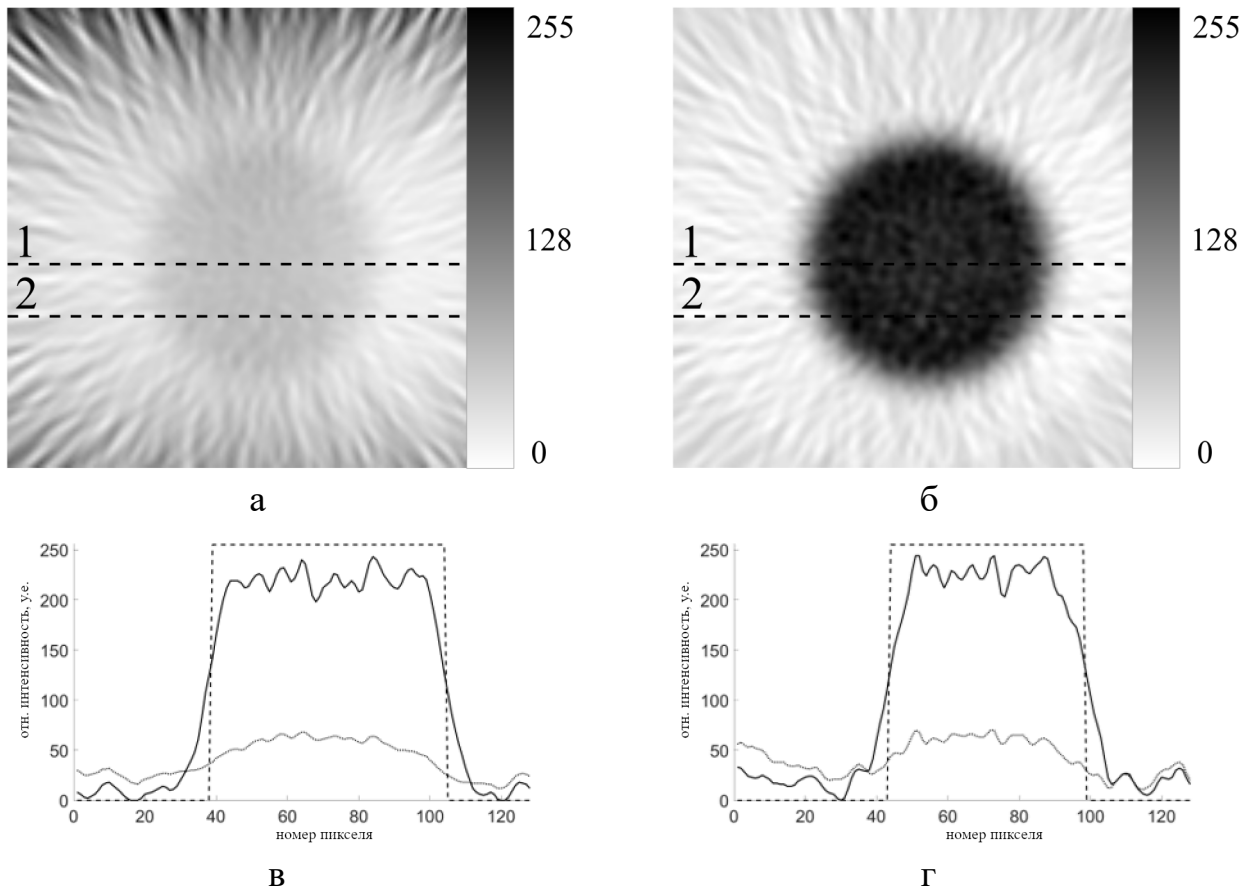


Рис. 4.12. Реконструированные томограммы распределения источников излучения в фосфоре: а – с помощью традиционного метода; б – нового метода; в – сечение по линии 1; г – сечение по линии 2. Истинное распределение источников излучения, реконструированное с помощью традиционного и нового метода показаны пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно

Реконструкция в среде с высоким значением коэффициента ослабления (такой как фосфор) показывает явное преимущество нового метода над традиционным методом реконструкции. На рисунке видно, что пространственное распределение источников излучения, реконструированное с помощью традиционного метода, практически сливается с артефактами вне объекта. В то же время, реконструкция новым методом сохраняет хорошую визуальную различимость как границ исследуемого объекта, так и содержимого внутри объекта. Кроме этого, значение критерия

среднеквадратичного отклонения  $D$  в новом методе меньше как для всего объекта целиком, так и для профилей 1 и 2.

На рис. 4.13 показаны графические иллюстрации зависимости точности реконструкции по критерию среднеквадратичного отклонения  $D$  в зависимости от коэффициента ослабления  $\mu$ , коэффициента поглощения  $\mu_a$  и коэффициента рассеяния  $\mu_s$ . На рис. 4.14 показана гистограмма со значениями критерия отклонения  $D$  для всего объекта целиком и на рис. 4.15, 4.16 показаны значения критерия отклонения  $D$  для сечения (1) и (2) соответственно.

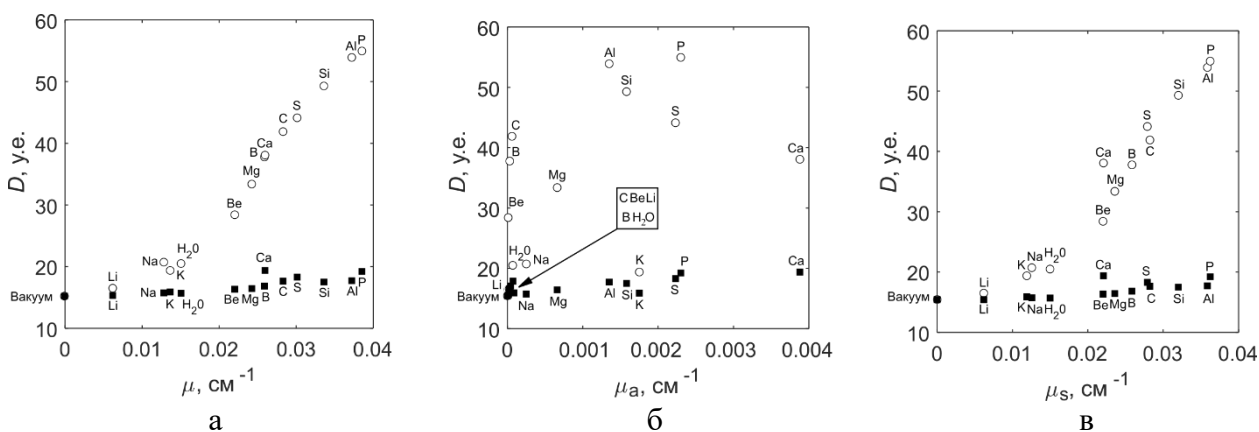


Рис. 4.13. Зависимость точности реконструкции по критерию  $D$  для объекта в целом от коэффициента ослабления (а), коэффициента поглощения (б) и коэффициента рассеяния (в): реконструкция с помощью традиционного метода ( $\circ$ ) и нового метода ( $\blacksquare$ )

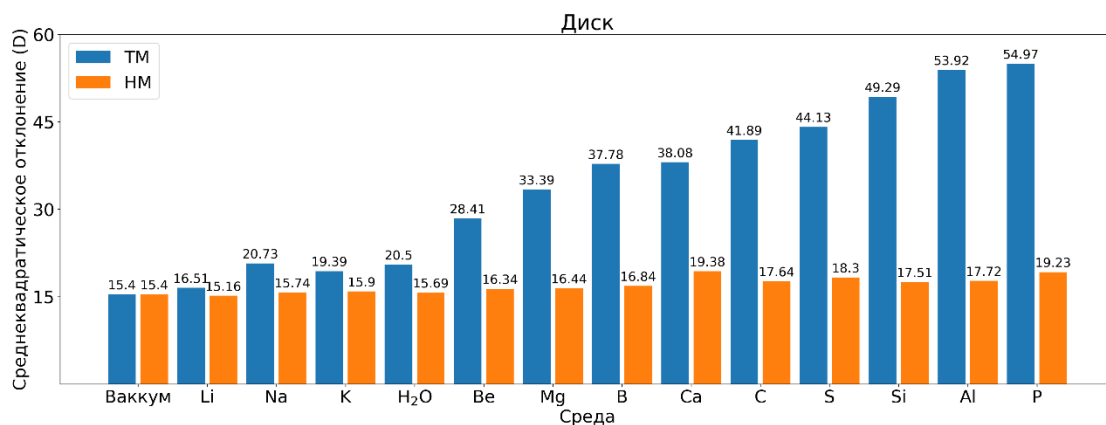


Рис. 4.14. Зависимость точности реконструкции по критерию  $D$  для объекта в целом от коэффициента ослабления

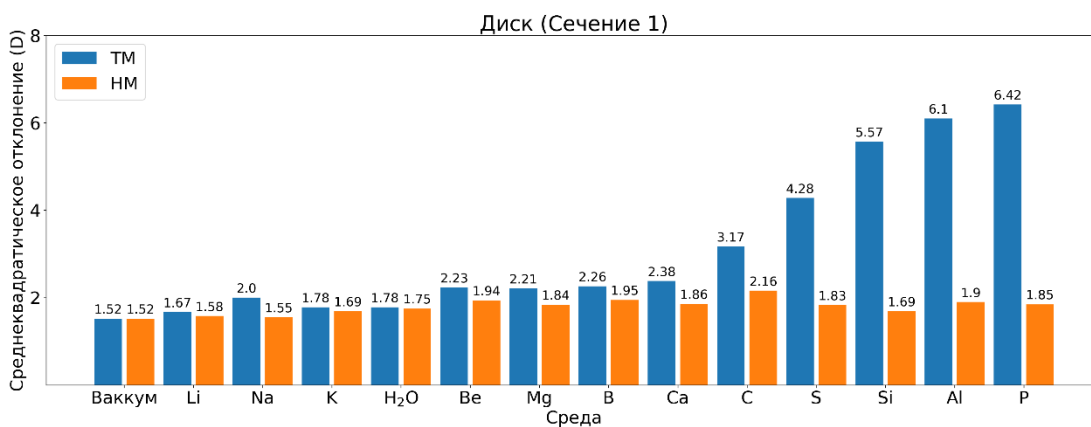


Рис. 4.15. Зависимость точности реконструкции по критерию  $D$  для сечения (1) от коэффициента ослабления

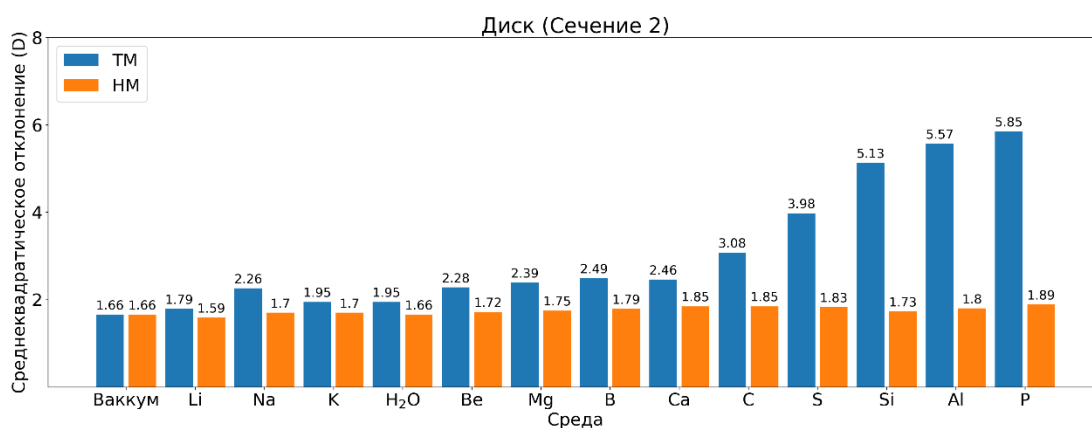


Рис. 4.16. Зависимость точности реконструкции по критерию  $D$  для сечения (2) от коэффициента ослабления

Несмотря на то, что моделируемая среда не имеет свойства "рассеяние прямо назад", результат реконструкции в такой среде показывает несравненное преимущество нового метода над традиционным. В средах с небольшим значением коэффициента ослабления это выражается в меньшей интенсивности артефактов вне исследуемого объекта, особенно по краям изображения. С ростом коэффициента ослабления преимущество реконструкции нового метода над традиционным методом реконструкции становится всё более заметным. Это выражается не только в меньшей интенсивности, но также и в улучшении визуальной различимости деталей томограммы. Для всех исследованных материалов реконструкция новым

методом демонстрирует превосходство над реконструкцией с помощью традиционного метода.

На втором этапе производилось сравнение влияния рассеяния излучения на точность реконструкции томограммы для простого и сложного объекта. Для этого в качестве исследуемых объектов были выбраны два цилиндрических типа пространственного распределения источников излучения с сечениями: в виде диска (простой объект) и модифицированный фантом Шеппа-Логана (рис. 4.17). Параметры модифицированного фантома Шеппа-Логана представлены в табл. 4.3. В качестве рассеивающей среды было выбрано четыре вещества: вода, кальций, углерод и алюминий. Коэффициенты поглощения, рассеяния и ослабления излучения для этих веществ приведены в табл. 4.1.

Для каждой проекции детекторная сборка поворачивалась на 2,5 градуса до тех пор, пока каждая изборок не пройдёт 45 градусов. Таким образом происходило снятие проекционных данных для полного круга в 360 градусов. Для получения проекций каждого фантома были смоделированы  $\sim 5 \cdot 10^7$  траекторий квантов. Время измерения одной проекции составляло 5 секунд виртуального времени. Полное время снятия всех проекций составляло 90 секунд виртуального времени.

Реконструкция пространственного распределения источников излучения производилась по 144 измеренным ракурсам. Поле реконструкции составляло пространство с областью 190 x 190 мм. Это поле было дискретизировано на 128 x 128 пикселей, размер одного пикселя составлял 1,5 x 1,5 мм. В качестве фильтрующей функции на этапе фильтрации проекций использовался фильтр Ханна. Относительная частота обрезания в фильтре составляла 0,8 относительных единиц. При обратном проецировании использовалась линейная интерполяция. Полученные проекционные данные для диска и модифицированного фантома Шеппа-Логана в воде и алюминии показаны на рис. 4.18.

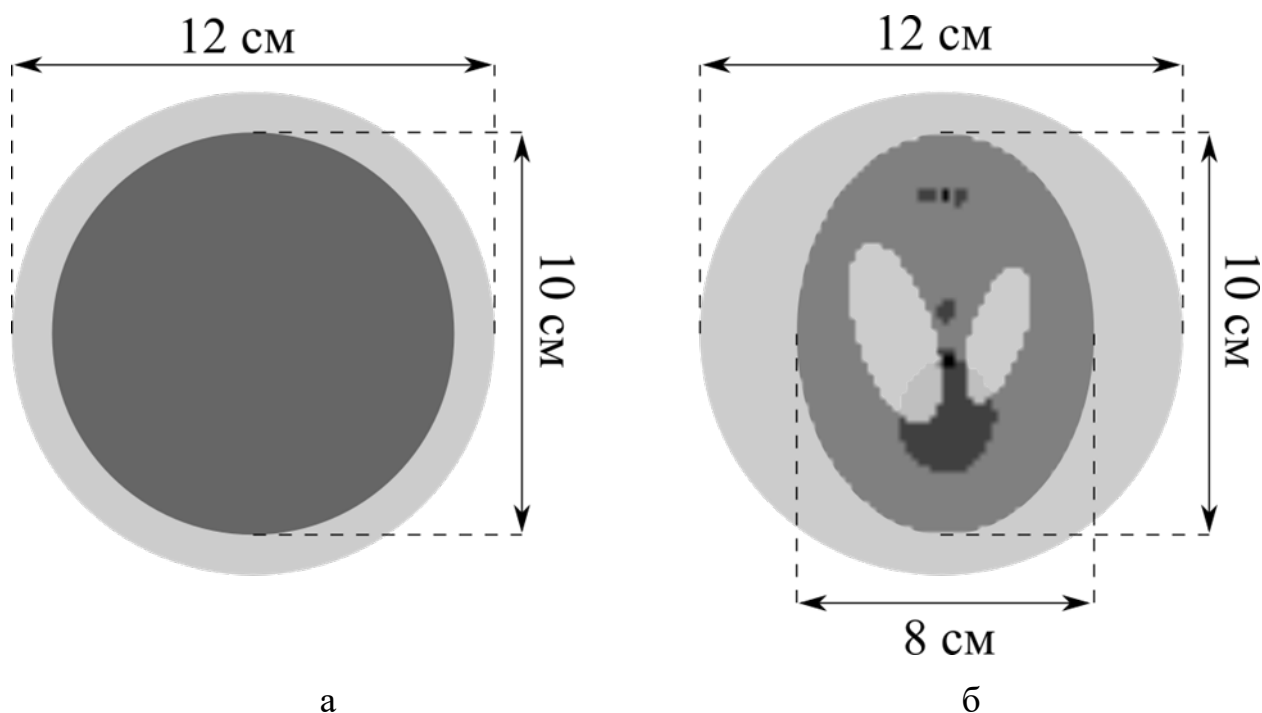


Рис. 4.17. Объект типа "Диск" (а) с однородным распределением источников излучения в круге диаметра 10 см и однородным распределением коэффициента ослабления в круге диаметра 12 см и объект типа "Фантом Шеппа-Логана" (б) с распределением источников излучения в эллипсе с осями 10 см и 8 см и однородным распределением коэффициента ослабления в круге диаметра 12 см

Табл. 4.3. Параметры объекта типа "Фантом Шеппа-Логана"

Номер эллипса	Смещение центра эллипса, мм		Полуоси, мм		Угол поворота, градусы	Относительная интенсивность
	по оси x	по оси y	по оси x	по оси y		
1	0	0	0,6624	0,874	90	-0,1
2	0	0,22	0,11	0,31	72	-0,2
3	0	-0,22	0,16	0,41	108	-0,2
4	0,35	0	0,21	0,35	90	0,1
5	0,10	0	0,46	0,46	0	0,1
6	-0,10	0	0,46	0,46	0	0,1
7	-0,605	0,8	0,23	0,46	0	0,1
8	-0,605	0	0,23	0,23	0	0,2
9	-0,605	6	0,23	0,46	90	0,1

Результаты реконструкции томограмм для воды показаны на рис. 4.19, 4.20 и в алюминии на рис. 4.21, 4.22. На рисунках изображены

реконструированные томограммы с помощью традиционного метода и нового метода. Для каждого изображения представлены сечения 1 и 2, а также сечение исходного объекта. Результаты реконструкции томограмм для кальция и углерода являются аналогичными. Значения среднеквадратического отклонения  $D$  для всего объекта целиком приведены в табл. 4.4 и для сечений 1 и 2 в табл. 4.5. На рис. 4.23 показаны полученные значения критерия отклонения  $D$  в виде гистограмм.

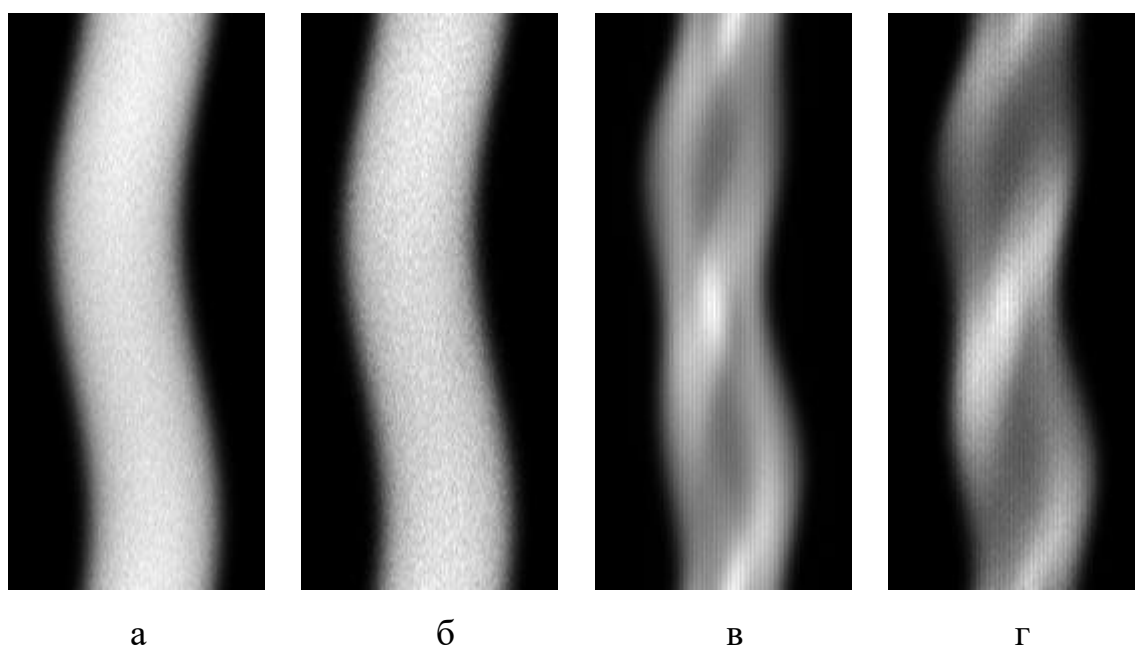


Рис. 4.18. Измеренные проекционные данные для объекта типа "Диск" в воде (а) и алюминии (б) и для объекта типа "Фантом Шеппа-Логана" в воде (в) и алюминии (г)

Как и в случае с простым объектом, реконструкция с помощью нового метода даёт лучший результат по сравнению с традиционным методом реконструкции. Это улучшение выражается как в лучшей визуальной различимости деталей внутри объекта, так и в интенсивности артефактов вне объекта. Кроме этого, с ростом коэффициента ослабления для сложного объекта сохраняется преимущество нового метода по сравнению с традиционным методом. Это различие сохраняется не только на реконструированной томограмме, но и так же во всех сечениях изображения.

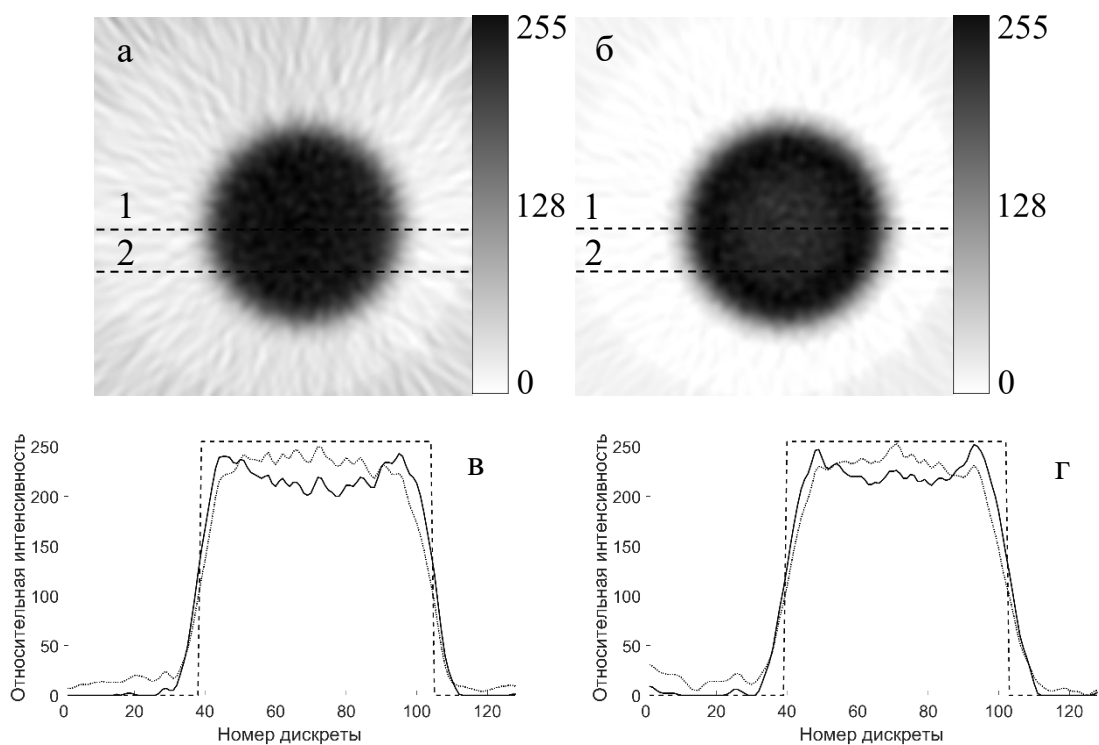


Рис. 4.19. Реконструированная томограмма распределения источников излучения типа “Диск” с помощью традиционного метода (а) и нового метода (б); профиль в сечениях 1 (в) и 2 (г) (истинный – штриховая линия, традиционный метод – пунктирная линия, новый метод – сплошная линия). Среда – вода

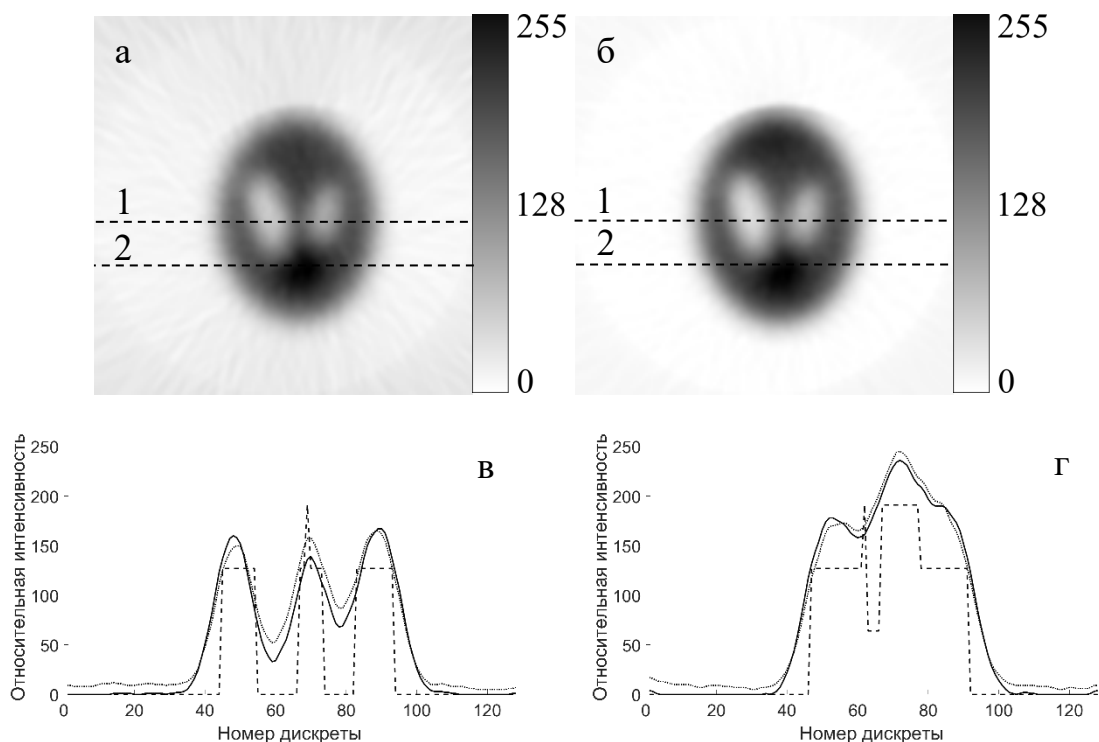


Рис. 4.20. Реконструированная томограмма распределения источников излучения типа “Фантом Шеппа-Логана” с помощью традиционного метода (а) и нового метода (б); профиль в сечениях 1 (в) и 2 (г) (истинный – штриховая линия, традиционный метод – пунктирная линия, новый метод – сплошная линия). Среда – вода

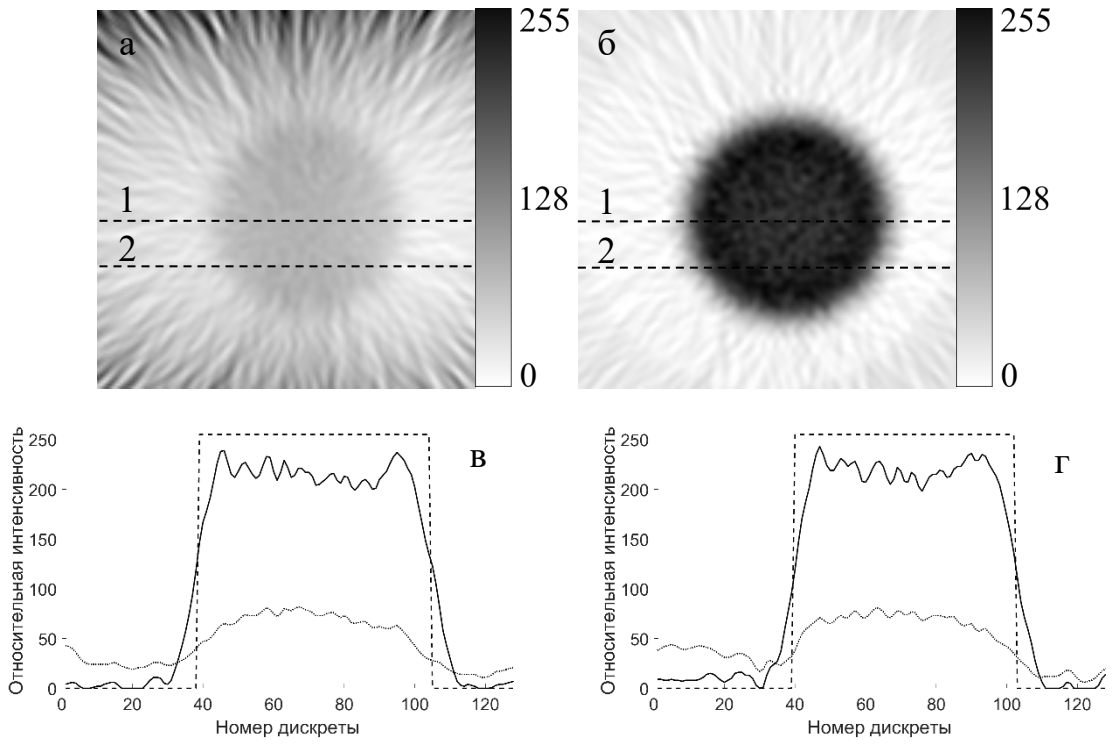


Рис. 4.21. Реконструированная томограмма распределения источников излучения типа “Диск” с помощью традиционного метода (а) и нового метода (б); профиль в сечениях 1 (в) и 2 (г) (истинный – штриховая линия, традиционный метод – пунктирная линия, новый метод – сплошная линия). Среда – алюминий

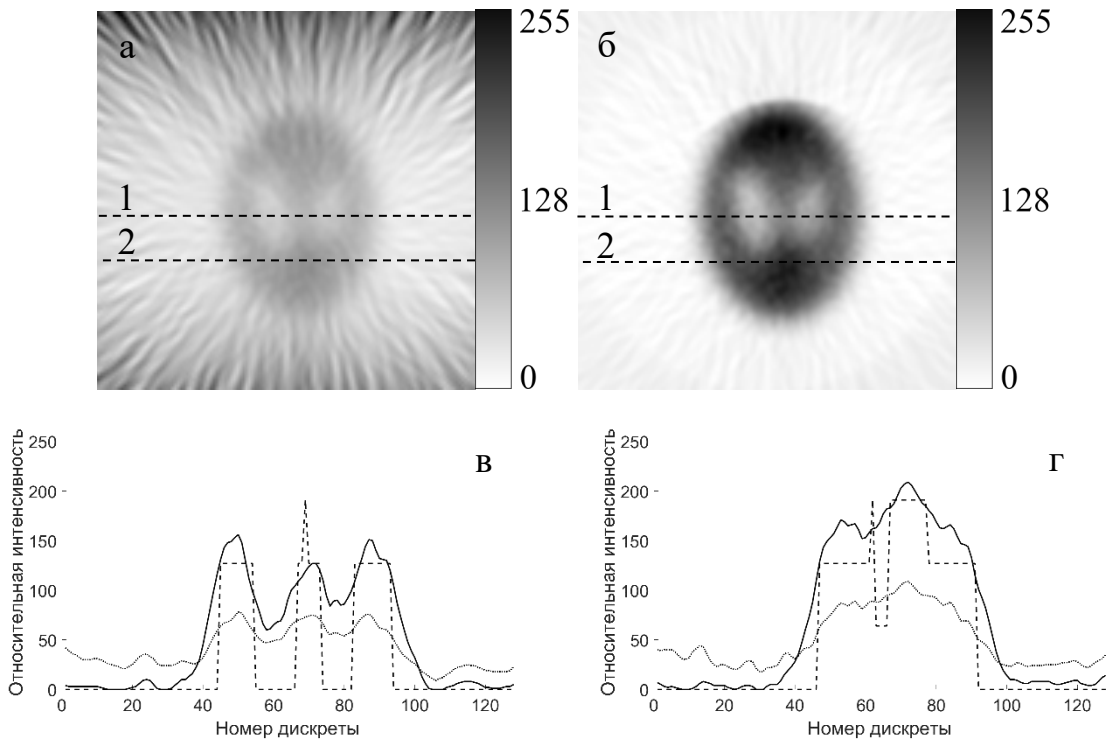


Рис. 4.22. Реконструированная томограмма распределения источников излучения типа “Фантом Шеппа-Логана” с помощью традиционного метода (а) и нового метода (б); профиль в сечениях 1 (в) и 2 (г) (истинный – штриховая линия, традиционный метод – пунктирная линия, новый метод – сплошная линия).

Среда – алюминий



Табл. 4.4. Отклонение (отн. ед.) реконструированного распределения источников излучения от истинного по критерию  $D$  для объекта в целом

	Диск		Фантом Шеппа-Логана	
	Формула (4)	Формула (16)	Формула (4)	Формула (16)
Вода	5,229	4,001	4,323	4,237
Кальций	9,728	4,905	7,431	5,090
Углерод	10,616	4,085	8,297	4,810
Алюминий	13,748	4,518	8,623	4,604

По полученным результатам можно сделать вывод, что новый метод реконструкции имеет несомненное преимущество над традиционным, несмотря на то что в его основе лежит особый вид индикатрисы рассеяния, описывающей среду со свойством "рассеяние прямо назад". Это можно объяснить следующим образом: с математической точки зрения в данном методе делается только одно предположение о специальном виде индикатрисы рассеяния. После этого предположения никаких дополнительных предположений не делается. На основе этого предположения получено точное решение УПИ и точное решение обратной томографической задачи. С физической точки зрения такая индикатриса рассеяния описывает фотоны, отклонение которых от оси каждой канала коллиматора незначительно. В результате фотоны, которые сильно отклоняются от нормали к ПЧД, практически не вносят вклад в проекционные данные.

Табл 4.5. Отклонение (отн. ед.) реконструированного распределения источников излучения от истинного по критерию  $D'$  в сечениях 1 и 2

	Диск				Фантом Шеппа-Логана			
	Формула (4)		Формула (16)		Формула (4)		Формула (16)	
	Сеч. 1	Сеч. 2	Сеч. 1	Сеч. 2	Сеч. 1	Сеч. 2	Сеч. 1	Сеч. 2
Вода	0,453	0,482	0,445	0,440	0,505	0,477	0,457	0,467
Кальций	0,609	0,627	0,474	0,455	0,597	0,553	0,526	0,506
Углерод	0,816	0,824	0,470	0,437	0,563	0,534	0,459	0,476
Алюминий	1,556	1,520	0,484	0,456	0,484	0,500	0,485	0,390

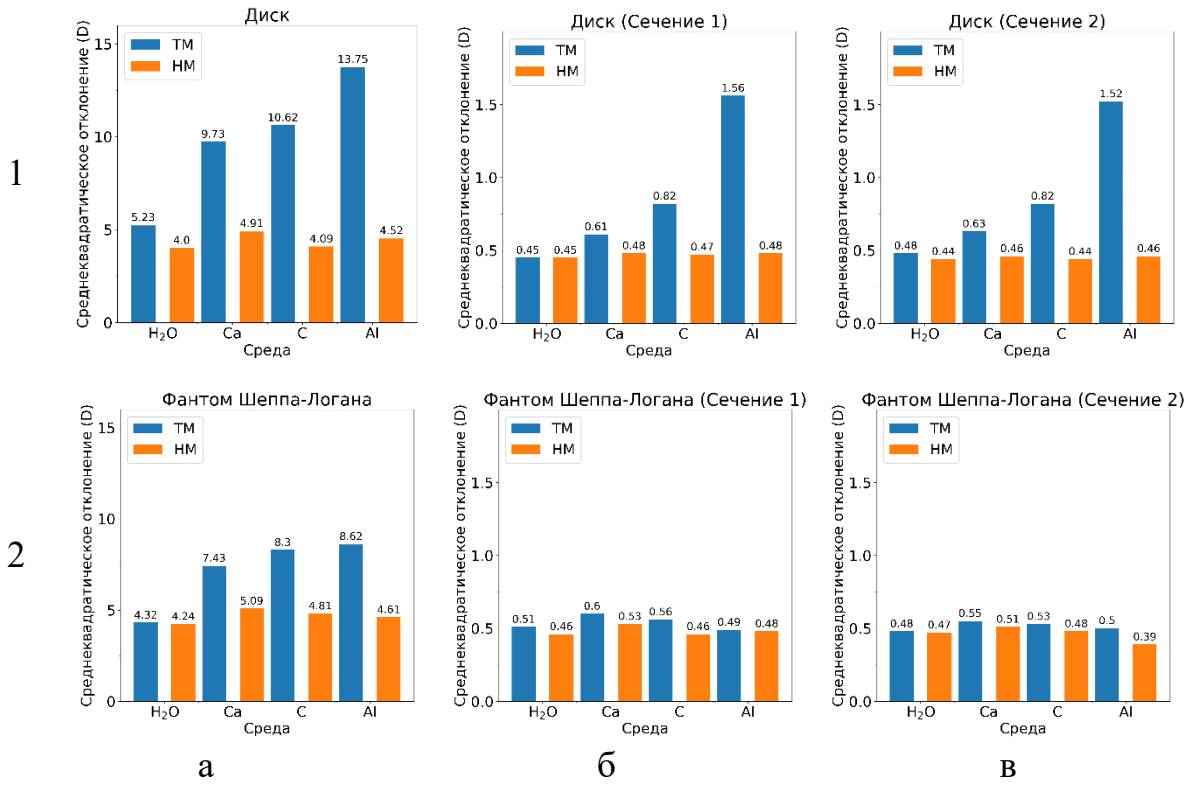


Рис. 4.23. Отклонение (отн. ед.) реконструированного распределения источников излучения для "Диск" (1) и "Фантом Шеппа-Логана" (2) для всего объекта (а) и для сечения 1 (б) и 2 (в)

#### 4.4. Выводы

1. Разработана программа численного моделирования ОФЭКТ, которая позволяет получить проекционные данные методом Монте-Карло, учитывающим все основные особенности взаимодействия излучения с веществом, и осуществлять реконструкцию пространственного распределения источников излучения на основе точного решения обратной томографической задачи для РПН-среды.

2. Получены зависимости критерия среднеквадратичного отклонения реконструированного изображения от истинного для тринадцати веществ рассеивающей среды и пространственного распределения источников излучения с простой (фантом в виде диска) и сложной (фантом Шеппа-Логана) внутренней структурой.

3. Проведено сравнение предложенного метода реконструкции и традиционного метода реконструкции. Во всех случаях новый метод демонстрирует существенное преимущество над традиционным методом реконструкции, которое выражается не только в меньшем значении критерия среднеквадратичного отклонения, но и в лучшей визуальной различимости деталей томограммы.

4. Томограммы, полученные при реконструкции новым методом имеют значительно меньшую амплитуду артефактов вне объекта при небольших значениях коэффициента ослабления (до  $0,22 \text{ см}^{-1}$ ), а также лучшую визуальную различимость деталей внутри реконструированного пространственного распределения источников излучения для больших значений коэффициента ослабления (больше  $0,22 \text{ см}^{-1}$ ). Установлено, что с ростом значения коэффициента ослабления вещества среды преимущество нового метода над традиционным увеличивается.

5. Существенное преимущество нового метода над традиционным обусловлено эффективным учётом процесса рассеяния излучения. При этом, с математической точки зрения, кроме предположения об индикатрисе рассеяния никаких дополнительных предположений не делается, а уравнение

переноса излучения и обратная томографическая задача решаются точно, а не приближённо. В то же время, с физической точки зрения, несмотря на искусственность индикатрисы "рассеяние прямо назад", она описывает большую часть попавших на детектор рассеянных фотонов за счёт того, что рассеянные фотоны, значительно отклоняющиеся от линии проецирования, поглощаются стенками каналов коллиматора.

Основные результаты, полученные в главе 4, опубликованы в [74, 98, 99, 100].

## Заключение

В диссертационной работе было проведено исследование влияния рассеяния излучения на точность реконструкции томограмм в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии. Исследование проводилось для проекционных данных, полученных с помощью моделирования на основе аналитических формул и с помощью метода Монте-Карло на основе ядерно-физической системы Geant4.

По результатам исследований можно сформулировать основные результаты и выводы:

1. Получено аналитическое решение уравнения переноса излучения для рассеивающей среды со свойством "рассеяние прямо назад" (РПН-среда).

2. Получено решение обратной задачи для эмиссионной томографии в РПН-среде.

3. Разработана программа моделирования процесса прохождения гамма-излучения через вещество на основе аналитического решения уравнения переноса излучения для РПН-среды.

4. Разработана программа томографической реконструкции пространственного распределения источников излучения в РПН-среде.

5. Определена зависимость точности реконструкции от отношения коэффициента рассеяния к коэффициенту ослабления при моделировании проекционных данных на основе аналитических формул. При этом во всех случаях точность реконструкции с помощью предложенного метода превосходит точность реконструкции по сравнению с традиционным методом.

6. Разработана программа моделирования прохождения гамма-излучения через вещество с помощью метода Монте-Карло на основе ядерно-физической системы Geant4, позволяющей получать проекционные данные, практически не отличающиеся от данных, получаемых в натурном эксперименте.

7. Определена зависимость точности реконструкции от отношения коэффициента рассеяния к коэффициенту ослабления при моделировании

проекционных данных на основе Geant4. При этом во всех случаях точность реконструкции с помощью предложенного метода превосходит точность реконструкции по сравнению с традиционным методом.

8. Проведено численное моделирование для 13 веществ рассеивающей среды (Li, Na, K, H<sub>2</sub>O, Be, Mg, B, Ca, C, S, Si, Al, P) проекционных данных методом Монте-Карло. Превосходство предложенного метода по сравнению с традиционным методом возрастает с ростом коэффициента рассеяния вещества среды.

9. В целом разработанный алгоритм реконструкции эмиссионных томограмм в условиях сильного рассеяния излучения по сравнению с традиционным методом улучшает точность реконструкции в несколько раз (до трёх раз в зависимости от величины коэффициента рассеяния среды) по критерию среднеквадратичного отклонения.

10. Полученные результаты могут быть использованы для усовершенствования существующих алгоритмов реконструкции изображений в ОФЭКТ, а также для разработки новых конструкций эмиссионных томографов.

В заключение автор считает своей обязанностью выразить искреннюю благодарность своему научному консультанту С.А. Терещенко за постоянное внимание и помощь на всех этапах работы.

## Список литературы

1. Flower M. A., editor. Webb's physics of medical imaging. CRC Press, 2012.
2. Cherry S.R., Sorenson J.A., Phelps M.E. Physics in nuclear medicine e-Book. Elsevier Health Sciences, 2012.
3. Grangeat P., editor. Tomography. John Wiley & Sons, 2013.
4. Prekeges J. Nuclear Medicine Instrumentation. Jones & Bartlett Publishers, 2012.
5. Wernick M.N., Aarsvold J.N., editors. Emission Tomography: The Fundamentals of PET and SPECT. San Diego: Elsevier Academic Press, 2004.
6. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. Москва: Физматлит, 2004.
7. Федоров Г. А., Терещенко, С. А. Вычислительная эмиссионная томография. Москва: Энергоатомиздат, 1990.
8. Kak A. C., Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging. SIAM, 2001.
9. Chappell M. Principles of Medical Imaging for Engineers. Springer, Cham, 2019. 169 pp.
10. Dahlbom M, editor. Physics of PET and SPECT Imaging. Boca Raton: CRC Press, 2017. 503 pp.
11. Kak A. C. Computerized tomography with X-ray, emission, and ultrasound sources // Proceedings of the IEEE. 1979. Vol. 67. No. 9. pp. 1245-1272.
12. Edited by O. Schober, F. Kiessling, J. Debus. Molecular Imaging in Oncology. 2nd ed. Springer, Cham, 2020. 918 pp.

13. Ljungberg M., Pretorius P. H. SPECT/CT: an update on technological developments and clinical applications // *The British Journal of Radiology*. 2017. Vol. 91. No. 1081. P. 20160402.
14. Khalil M. M. *Basic Sciences of Nuclear Medicine*. 2nd ed. Springer, Cham, 2021. 571 pp.
15. Cal-Gonzalez J., et al. Hybrid Imaging: Instrumentation and Data Processing // *Frontiers in Physics*. 2018. Vol. 6. P. 47.
16. Jaszczak R. J., Coleman R. E., Whitehead F. R. Physical factors affecting quantitative measurements using camera-based single photon emission computed tomography (SPECT) // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1981. Vol. 28. No. 1. pp. 69-80.
17. Yenumula L. Ring artifact correction in gamma-ray process tomography imaging // *Applied Radiation and Isotopes*. 2017. Vol. 124. pp. 75-82.
18. Fitzgerald J., Danias P. G. Effect of motion on cardiac SPECT imaging: Recognition and motion correction // *Journal of Nuclear Cardiology*. 2001. Vol. 8. pp. 701-706.
19. Dawood M., Jiang X. *Correction Techniques in Emission Tomography*. CRC Press, 2012.
20. Kyme A. Z., Fulton R. R. Motion estimation and correction in SPECT, PET and CT // *Physics in Medicine & Biology*. 2021. Vol. 66. P. 18TR02.
21. Bellini S., Piacentini M., Cafforio C., Rocca F. Compensation of tissue absorption in emission tomography // *IEEE Tr. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1979. Vol. ASSP-27. No. 3. pp. 213-218.
22. Zaidi H., Koral K. F. Scatter modelling and compensation in emission tomography // *European journal of nuclear medicine and molecular imaging*. 2004. Vol. 31. No. 5. pp. 761-782.



23. Lee H. Edge penetration by radiation through a collimation system // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1982. Vol. 197. No. 2-3. pp. 411-416.
24. Chan C. et al. Noise suppressed partial volume correction for cardiac SPECT/CT // Medical Physics. 2016. Vol. 43. No. 9. pp. 5225-5239.
25. Bruyant P. P. Analytic and Iterative Reconstruction Algorithms in SPECT // Journal of Nuclear Medicine. 2002. Vol. 43. pp. 1343-1358.
26. Kak A. C., Slaney M., Wang G. Principles of computerized tomographic imaging // Medical Physics. 2002. Vol. 29. No. 1. P. 107.
27. Hazou I. A., Solmon D. C. Filtered-backprojection and the exponential Radon transform // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 141. No. 1. pp. 109-119.
28. Inouye T., Kose K., Hasegawa A. Image reconstruction algorithm for single-photon-emission computed tomography with uniform attenuation // Physics in Medicine & Biology. 1989. Vol. 34. No. 3. P. 299.
29. Jun J., Jinping W. Reconstruction Results about the Exponential Radon Transform // Journal of Natural Science. 2013. Vol. 18. No. 1. pp. 25-28.
30. Tsui B. M. W., Frey E. C. Analytic image reconstruction methods in emission computed tomography // Quantitative analysis in nuclear medicine imaging. 2006. pp. 82-106.
31. Vandenberghe S., et al. Iterative reconstruction algorithms in nuclear medicine // Computerized Medical Imaging and Graphics. 2001. Vol. 25. pp. 105-111.

32. Qi J., Leahy R. M. Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography // *Physics in Medicine & Biology*. 2006. Vol. 51. No. 15. P. R541.
33. Vandervoort E., et al. Implementation of an analytically based scatter correction in SPECT reconstructions // *IEEE transactions on nuclear science*. 2005. Vol. 52. No. 3. pp. 645-653.
34. Kazantsev D., Pickalov V. New iterative reconstruction methods for fan-beam tomography // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2018. Vol. 26. No. 6. pp. 773-791.
35. Xiang H., et al. A deep neural network for fast and accurate scatter estimation in quantitative SPECT/CT under challenging scatter conditions // *European journal of nuclear medicine and molecular imaging*. 2020.
36. Dietze M. M. A., et al. Accelerated SPECT image reconstruction with FBP and an image enhancement convolutional neural network // *EJNMMI physics*. 2019. Vol. 6. No. 1. P. 14.
37. Munley M. T., et al. An artificial neural network approach to quantitative single photon emission computed tomographic reconstruction with collimator, attenuation, and scatter compensation // *Medical Physics*. 1994. Vol. 21. No. 12. pp. 1889-1899.
38. McMillan A. B., Bradshaw T. J. Artificial Intelligence–Based Data Corrections for Attenuation and Scatter in Position Emission Tomography and Single-Photon Emission Computed Tomography // *PET clinics*. 2021. Vol. 16. No. 4. pp. 543-552.
39. Lyra M., Ploussi A. Filtering in SPECT Image Reconstruction // *International Journal of Biomedical Imaging*. 2011. Vol. 2011. pp. 1-14.
40. Zaidi H., Koral K. F. Scatter correction strategies in emission tomography // *Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging*. 2006. P. 583.

41. Hutton H.F., Buvat I., Beekman F. J. Review and current status of SPECT scatter correction // *Physics in Medicine & Biology*. 2011. Vol. 56. No. 14. P. R85.
42. Shibutani T., et al. Influence of Attenuation Correction by Brain Perfusion SPECT/CT Using a Simulated Abnormal Bone Structure: Comparison Between Chang and CT Methods // *Journal of Nuclear Medicine Technology*. 2017. Vol. 45. No. 3. pp. 208-213.
43. Rafati M., et al. Assessment of the scatter correction procedures in single photon emission computed tomography imaging using simulation and clinical study // *Journal of Cancer Research and Therapeutics*. 2017. Vol. 13. No. 6. pp. 936-942.
44. Ogawa K., et al. A practical method for position-dependent Compton-scatter correction in single photon emission CT // *IEEE transactions on medical imaging*. 1991. Vol. 10. No. 3. pp. 408-412.
45. Pretorius P. H., et al. Evaluation of 3D Monte Carlo-based scatter correction for <sup>99m</sup>Tc cardiac perfusion SPECT // *Journal of Nuclear Medicine*. 2006. Vol. 47. No. 10. pp. 1662-1669.
46. Harris C. C., et al. Tc-99m attenuation coefficients in water-filled phantoms determined with gamma cameras // *Medical Physics*. 1984. Vol. 11. No. 5. pp. 681-685.
47. Chun S. Y., Fessler J. A., Dewaraja Y. K. Correction for Collimator-Detector Response in SPECT Using Point Spread Function Template // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2013. Vol. 32. No. 2. pp. 295-305.
48. Ichihara T., et al. Compton scatter compensation using the triple-energy window method for single-and dual-isotope SPECT // *Journal of Nuclear Medicine*. 1993. Vol. 34. No. 12. pp. 2216-2221.

49. Ogawa K. Simulation study of triple-energy-window scatter correction in combined Tl-201, Tc-99m SPECT // *Annals of nuclear medicine*. 1994. Vol. 8. No. 4. pp. 277-281.
50. Cao Z. J., Frey E. C., Tsui B. M. W. A scatter model for parallel and converging beam SPECT based on the Klein-Nishina formula // *IEEE transactions on nuclear science*. 1994. Vol. 41. No. 4. pp. 1594-1600.
51. Kadrmas D. J., et al. Fast implementations of reconstruction-based scatter compensation in fully 3D SPECT image reconstruction // *Physics in Medicine & Biology*. 1998. Vol. 43. No. 4. P. 857.
52. Wells R. G., Celler A., Harrop R. Analytical calculation of photon distributions in SPECT projections // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1998. Vol. 45. No. 6. pp. 3202-3214.
53. Laurette I., et al. A three-dimensional ray-driven attenuation, scatter and geometric response correction technique for SPECT in inhomogeneous media // *Physics in medicine & biology*. 2000. Vol. 45. No. 11. P. 3459.
54. Bai C., Zeng G. L., Gullberg G. T. A slice-by-slice blurring model and kernel evaluation using the Klein-Nishina formula for 3D scatter compensation in parallel and converging beam SPECT // *Physics in Medicine & Biology*. 2000. Vol. 45. No. 5. P. 1275.
55. Sohlberg A., Watabe H., Iida H. Acceleration of Monte Carlo-based scatter compensation for cardiac SPECT // *Physics in Medicine & Biology*. 2008. Vol. 53. No. 14. P. N277.
56. Beekman F. J., de Jong H. W. A. M., van Geloven S. Efficient fully 3-D iterative SPECT reconstruction with Monte Carlo-based scatter compensation // *IEEE transactions on medical imaging*. 2002. Vol. 21. No. 8. pp. 867-877.

57. Bexelius T., Sohlberg A. Implementation of GPU accelerated SPECT reconstruction with Monte Carlo-based scatter correction // *Annals of Nuclear Medicine*. 2018. Vol. 32. pp. 337-347.
58. Case K. M., Zweifel P. F. *Linear transport theory*. London: Addison–Wesley, 1967.
59. Ishimaru A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. New York: Academic, 1978.
60. Kol'chuzhkin A. M., Uchaikin V. V. *Introduction to the Theory of Particle Passage Through Matter*. Moscow: Atomizdat, 1978.
61. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. *Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты*. Наука, 1983.
62. Barrett H. H., et al. Scattered radiation in nuclear medicine: A case study on the Boltzmann transport equation // *Computational Radiology and Imaging*. 1999. pp. 71-100.
63. Hussein E. M. A. *Radiation mechanics: Principles and practice*. Elsevier, 2010.
64. Tretiak O., Metz C. The exponential Radon Transform // *SIAM J. of Applied Mathematics*. 1980. Vol. 39. No. 2. pp. 341-354.
65. Gullberg G.T., Budinger T.F. The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single-photon emission computed tomography // *IEEE Tr. on Biomedical Engineering*. 1981. Vol. BME-28. No. 2. pp. 142-157.
66. D'Acunto M., et al. 3D image reconstruction using Radon transform // *Signal, Image and Video Processing*. 2016. Vol. 10. No. 1. pp. 1-8.
67. Weng Y., Zeng G. L., Gullberg G. T. Analytical Inversion Formula for Uniformly Attenuated Fan-Beam Projections // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1997. Vol. 44. No. 2. pp. 243-249.

68. Shi H., et al. A Novel Iterative CT Reconstruction Approach Based on FBP Algorithm // PLoS ONE. 2015. Vol. 10. No. 9. pp. e0138498-1–e0138498-17.
69. Bal G., Moireau P. Fast numerical inversion of the attenuated Radon transform with full and partial measurements // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. pp. 1137-1164.
70. Wen J., Liang Z. An inversion formula for the exponential Radon transform in spatial domain with variable focal-length fan-beam collimation geometry // Medical Physics. 2006. Vol. 33. pp. 792-798.
71. Huang Q., Zeng G., Gullberg G. T. An analytical inversion of the  $180^\circ$  exponential Radon transform with a numerically generated kernel // International Journal of Image and Graphics. 2007. Vol. 7. No. 1. pp. 71-85.
72. Терещенко С. А. Однофотонная эмиссионная вычислительная томография в пропорциональной рассеивающей среде // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. № 9. С. 1283-1289.
73. Allison J., et al. Geant4 developments and applications // IEEE Transactions on nuclear science. 2006. Vol. 53. No. 1. pp. 270-278.
74. **Tereshchenko S. A., Lysenko A. Yu. Single-photon emission computed tomography in the scattering medium with the property of “scattering straight back” // Journal of Applied Physics. 2021. Vol. 129. P. 035101.**
75. Chang L. T. A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography // IEEE Tr. on Nuclear Science. 1978. Vol. NS-25. pp. 638-643.
76. **Лысенко А. Ю. Исследование фактора геометрического ослабления в позитронно-эмиссионной томографии // Тезисы докладов 23-й Всероссийской межвузовской научно-**

технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика – 2016». 2016. С. 270.

77. Терещенко С. А., Лысенко А.Ю. Коррекция геометрического ослабления излучения в позитронно-эмиссионной томографии // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2017. Т. 22. № 2. С. 180-186.
78. Lysenko A. Yu., Tereshchenko S. A. Correction of Radiation Scattering Influence in Single Photon Emission Computed Tomography // Proceedings of the 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering. 2020. pp. 2515-2518.
79. Lysenko A. Yu., Tereshchenko S. A. Numerical simulation of single-photon emission computed tomography in a proportional scattering medium // AIP Conference Proceedings. 2019. pp. 020040-1–020040-4.
80. Lysenko A. Yu., Tereshchenko S. A. Solid Angle Fraction in Single Photon Emission Tomography // Proceedings of the 13th Russian German Conference on Biomedical Engineering. 2018. pp. 67-70.
81. Lysenko A. Yu., Tereshchenko S. A., Pyanov I. V. Investigation of the scattering influence in single-photon emission computed tomography in a proportional scattering medium // Proceedings of the 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering. 2019. pp. 2324-2327.
82. Tereshchenko S. A., Lysenko A. Yu. Correction of Solid Angle Fraction Influence on the Reconstruction Quality in the Single Photon Emission Computed Tomography // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus) 2017». 2017. pp. 423-426.

83. Tereshchenko S. A., Lysenko A. Yu. Investigation of the geometric attenuation influence on a reconstruction quality in the emission tomography // Proceedings of the 12th Russian-German Conference on Biomedical Engineering. 2016. pp. 309-311.
84. Tereshchenko S. A., Lysenko A. Yu., Selishchev. S. V. Correction Matrix Method for Elimination of Solid Angle Fraction Influence in the Positron Emission Tomography // Proceedings of IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus). 2018. pp. 1940-1942.
85. Лысенко А. Ю. Влияние геометрического ослабления при реконструкции пространственного распределения источников излучения // Тезисы докладов 22-й Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика – 2015». 2015. С. 330.
86. Лысенко А. Ю. Коррекция фактора геометрического ослабления в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии // Тезисы докладов 24-й Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика – 2017». 2017. С. 234.
87. Лысенко А. Ю. Расчёт зависимостей качества реконструкции в ОФЭКТ от размеров объекта и степени рассеяния излучения // Микроэлектроника и информатика. 26-я Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов и аспирантов. Тезисы докладов. 2019. С. 186.



88. Лысенко А.Ю., Терещенко С. А. Геометрическое ослабление в однофотонной эмиссионной томографии // Биомедицинская радиоэлектроника. 2018. № 6. С. 9-11.
89. Терещенко С. А., Лысенко А. Ю. Исследование влияния рассеяния на точность реконструкции в однофотонной эмиссионной вычислительной томографии в пропорциональной рассеивающей среде // Медицинская техника. 2019. № 5. С. 53-55.
90. Терещенко С. А., Лысенко А. Ю., Потапов Д. А. Геометрическое ослабление излучения в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии // Медицинская физика. 2017. № 2. С. 38-45.
91. Лысенко А. Ю. Получение проекционных данных в вычислительной томографии методом Монте-Карло (системы Geant4 и GATE) // Микроэлектроника и информатика. 25-я Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов и аспирантов. Тезисы докладов. 2018. С. 244-245.
92. Agostinelli S., et al. GEANT4—a simulation toolkit // Nuclear instruments and methods in physics research section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 506. No. 3. pp. 250-303.
93. Allison J. Recent developments in Geant4 // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2016. Vol. 835. pp. 186-225.
94. Sarrut D., et al. A review of the use and potential of the GATE Monte Carlo simulation code for radiation therapy and dosimetry applications // Medical physics. 2014. Vol. 41. No. 6. P. 064301.

95. Taheri A., Heidary S., Shahrabi H. Monte Carlo simulation of a SPECT system: GATE, MCNPX or SIMIND? (a comparative study) // Journal of Instrumentation. 2017. Vol. 12. No. 12. P. 12022.
96. Sarrut D., et al. Advanced Monte Carlo simulations of emission tomography imaging systems with GATE // Physics in Medicine & Biology. 2021. Vol. 66. P. 10TR03.
97. XCOM: Photon Cross Sections Database [Электронный ресурс] URL: <https://www.nist.gov/pml/xcom-photon-cross-sections-database>
98. **Лысенко А. Ю. Comparison of integral reconstruction methods in SPECT based on numerical simulation of detector's count by the Monte Carlo method using the Geant4 system // Proceedings of the 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering. 2021. pp. 2823-2826.**
99. **Терещенко С.А., Лысенко А.Ю. Реконструкция пространственного распределения источников излучения в пропорциональной рассеивающей среде // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. № 5. С. 932-742.**
100. **Лысенко А.Ю. Численное моделирование центрально симметричного объекта в ОФЭКТ в приближении пропорционально рассеивающей среды // Тезисы докладов 27-й Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика. 2020. С. 204.**