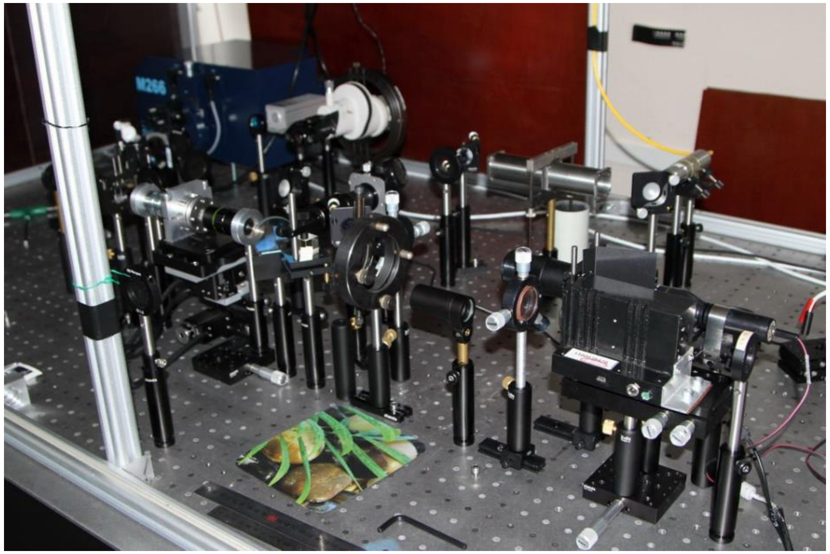
Физические методы исследования состава и структуры веществ
Часть II : Теория ошибок измерений

Теория ошибок и обработка результатов эксперимента I

Классификация ошибок измерения, среднее значение, стандартное отклонение, нормальное распределение, доверительная вероятность, доверительный интервал, распределение Стьюдента, ошибки косвенных измерений



Павел В. Зинин

Погрешности

Цель данной лекции – предложить алгоритм обработки результатов экспериментальных работ. Прежде всего необходимо научиться оценивать погрешности проводимых экспериментов. **Различают систематические, случайные и приборные погрешности**

1. **Систематические погрешности** обусловлены *факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении* одних и тех же измерений. Они вызывают отклонение измеренного значения от истинного всегда в одну и ту же сторону – либо в большую, либо в меньшую.
2. **Случайными** называются погрешности, которые при многократных измерениях в одинаковых условиях изменяются непредсказуемым образом. Случайные погрешности обусловлены *множеством неконтролируемых факторов,* действие которых различно при повторении измерений. В результате этого при измерении одной и той же величины несколько раз подряд в одинаковых условиях получается ряд различных значений этой величины, отличающихся от истинного значения случайным образом как в большую, так и в меньшую сторону.
3. **Приборными** называются погрешности, *обусловленные принципиальным несовершенством и ограниченной точностью* изготовления и градуировки технических устройств, используемых для измерений.

(**Ефимова А.И., Зотеев А.В., Склянкин А.А.** Общий физический практикум физического факультета МГУ. Погрешности эксперимента: МГУ, Физический факультет, 2012.)

Среднее и стандартное отклонение

Наименьшее расстояние, на котором глаз видит предмет, практически не напрягаясь, называют расстоянием наилучшего зрения. Для людей с нормальным зрением это расстояние равно приблизительно 25 см. Именно на таком расстоянии человек с хорошим зрением читает книгу. Мы провели измерение расстояний наилучшего зрения среди студентов нашей группы и получили результаты

43, 38, 30, 38, 57, 46, 45, 24

где для удобства единицы измерения измеренных значений опущены. Что мы должны принять за наилучшую оценку нашей величины?

Представляется разумным, чтобы нашей наилучшей оценкой было среднее значение, или среднее пяти найденных значений. Таким образом,

$$x_{наил} = \bar{x} = \frac{43+38+30+38+57+46+45+24}{8} = 40.125$$

Среднее значение измеряемой величины

Среднее значение, $\overline{x}$, измеряемой величины x указывает центр распределения, около которого группируются результаты отдельных измерений:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Влад	43		-2,9		8,3
Александр	38		2,1		4,5
Алина	30		10,1		102,5
Демид	38		2,1		4,5
Павел	57		-16,9		284,8
Юля	46		-5,9		34,5
Люда	45		-4,9		23,8
Камиль	24		16,1		260,0
Среднее значение	**40,1**		**0**		**26,9**

Стандартные ошибки и стандартные отклонения

Ошибка

$$e_i = x_i - a$$

это разницы между измерением x_i и истинным значением измеряемой величины a.

Отклонение

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

это отклонение измерения x_i от среднего значения. Определение стандартные ошибки и стандартные отклонения определяются по разному. Квадрат стандартной ошибки определяется как

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i^2}{n} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots e_n^2}{n}$$

Очевидно, что стандартную ошибку нельзя определить из нескольких измерений, т.к. мы не знаем истинное значение измеряемой величины a.

Среднеквадратичное или стандартное отклонение

Чтобы оценить достоверность результатов измерений в среднем естественно попытаться усреднить отклонения. К сожалению среднее значение отклонений равно нулю. На самом деле так будет в случае любого набора результатов измерений, поскольку уже само определение среднего значения ведет к тому, что Δx_i иногда положительны, а иногда отрицательны таким образом, чтобы среднее было равно нулю. Очевидно поэтому, что среднее отклонений — это не лучшая характеристика достоверности результатов измерений.

Лучший способ обойти эту неприятность - это возвести все отклонения в квадрат, а затем усреднить эти числа. Если мы теперь извлечем квадратный корень из полученного результата, то получим величину, которая измеряется в тех же единицах, что и сама величина среднего. Это число называется среднеквадратичным отклонением и обозначается как *s'*:

$$\boxed{s_n' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n}}}$$

Стандартное отклонение

Если при исследовании анализируется не весь массив имеющихся данных, а определенная выборка, то для расчета величины *среднеквадратического отклонения* или *стандартного отклонения* используется следующая формула

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{(n-1)}}$$

Коэффициент, *n*-1, появляется в связи с конечным количеством эспериментов. В этом случае вычисленное среднее значение отличается от предельного (получаемого при *n* -> ∞), и такая поправка дает возможность получить несмещенную оценку для дисперсии.

Вероятность случайной величины

Обоснование результатов теории ошибок измерений основано на теории вероятностей. Вероятность — степень (относительная мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события. Вероятность события А - это число Р (А), характеризующее возможность появления этого события. По определению, $0 \leq P(A) \leq 1$ - вероятность невозможного события равна нулю, достоверного равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах. Строгое введение понятия вероятности основывается на законе больших чисел.

Для описания вероятности введем отношение $\mu = m/n$ числа m появлений события А при n испытаниях; оно называется частотой этого события. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует число Р такое, что при достаточно большом числе испытаний n $|\mu - P| < \varepsilon$. Число Р называется вероятностью появления события А; по сути дела это предел, к которому стремится частота события А при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \mu = P$$

Для характеристики случайной величины нужно знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют закон распределения случайной величины. Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями, 6 , для каждого значения от 1 до 6.

Нормальное распределение

В теории случайных ошибок измерений важное значение имеет *нормальный закон распределения* или *функция Гаусса*. Он справедлив, когда действуют сразу несколько источников ошибок, и ни один из них не доминирует; при этом каждый источ- ник вносит лишь малую долю в общую ошибку. Впервые нормальный закон был обнаружен в X1X веке в применении к теории ошибок измерения Лапласом и Гауссом. После доказанния Ляпуновым центральной предельной теоремы, стало ясным, почему нормальный закон широко распространен в технике, биологии, и физике.

Карл Фридрих Гаусс

Непрерывная случайная величина *x* называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где *a* – математическое ожидание случайной величины *x*, σ - среднее квадратичное отклонение

Доверительная вероятность

Вероятность того, что результат измерения попадет в интервал $[x_1,x_2]$, равна:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

В скобках после *P* указано событие, для которого вычислена вероятность. При увеличении границ промежутка в обе стороны до бесконечности интеграл от функции распределения равно P (-∞;+∞) =1, т.е. попадание результата измерения в диапазон (-∞;+∞) является достоверным событием.

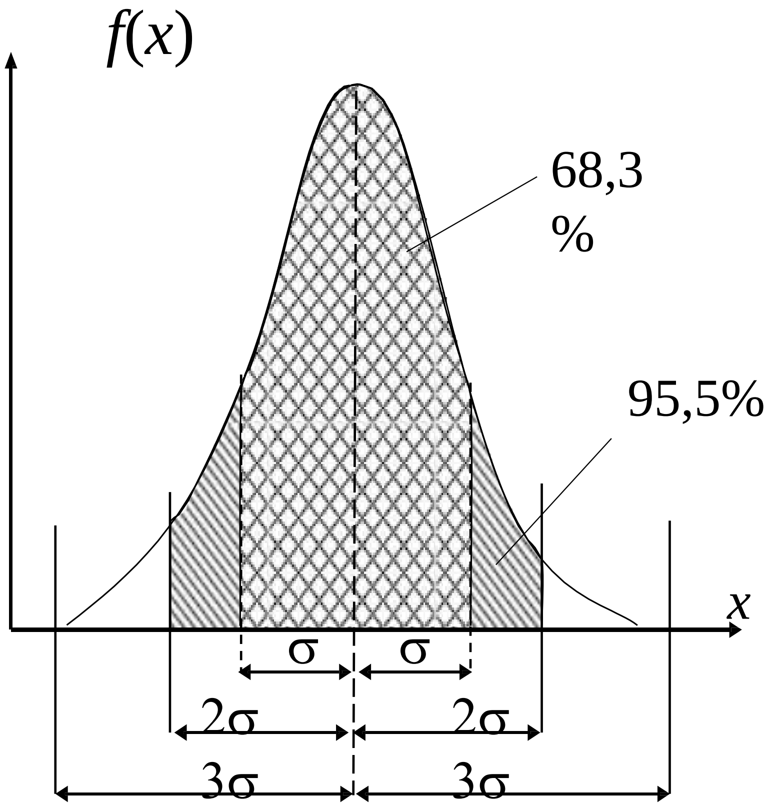
Пьер-Симон Лаплас

В период до XVIII века стали известны существенные источники ошибок наблюдений и общие меры, предохраняющие от их влияния или сводящие его к минимуму. XVIII в. благодаря работам Лапласа появились дифференциальные формулы оценки точности геодезических сетей, на этой же основе начало изучаться влияние ошибок наблюдений и инструментальных ошибок, были явно выделены понятия о систематических и случайных ошибках. Гаусс и Бессель: началась охота на ошибки. И приборы, и методы наблюдений стали считаться негодными, пока и поскольку не заканчивалось их тщательное исследование и не обнаруживались меры по устранению (по сведению к минимуму) выявленных погрешностей.

Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$$



$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

График плотности вероятности нормального распределения и процент попадания случайной величины на отрезки, равные среднеквадратическому отклонению.

Вычисление интеграла нормального распределения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx, J = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx, K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

$$J = I/(2\sqrt{2}), K = I/\sqrt{2}$$

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

$$x^2 + y^2 = r^2, dxdy = rdrd\varphi$$

$$J^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\varphi = \int_0^\infty e^{-r^2}rdr\int_0^{\pi/2}d\varphi = -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Центральная предельная теорема

Чем больше проведено испытаний (n), тем лучше выполняется это утверждение, т.е

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \bar{x} = a}$$

Оказывается, что при сколь угодно большом числе измерений, среднеквадратичная отклонение стремится к дисперсии:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} s_n = \sigma}$$

Александр Михайлович Ляпунов

и чем больше n, тем точнее равенство: $s \approx \sigma$. Очевидно, что из опыта мы можем найти только s.

Центральная предельная теорема позволяет утверждать, что всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом. А поскольку случайные величины всегда порождаются бесконечным количеством причин и чаще всего ни одна из них не имеет дисперсии, сравнимой с дисперсией самой случайной величины, то большинство встречающихся в практике случайных величин подчинено нормальному закону распределения

Доверительный интервал и доверительная вероятность

Задача обработки результатов измерений заключается в том, чтобы определить границы, в которых заключено истинное значение измеряемой величины. Принята следующая форма записи результата измерений какой-либо величины:

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)}$$

Пусть Δx отклонение от средней величины $\bar{x}$. Введем ε – величину отношения интервала Δx к стандартному отклонению

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta x}{s_n}}$$

Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины лежит внутри некоторого интервала, называется ***доверительной вероятностью***, или ***коэффициентом надежности***, а сам интервал - ***доверительным интервалом.*** Тогда при большом количестве экспериментов (n >30) можно определить доверительную вероятность, α, как

$$\boxed{\alpha = P(\bar{x} - \varepsilon\sigma \le x \le \bar{x} + \varepsilon\sigma)}$$

Доверительной вероятностью можно вычислит по приближенной формуле если задано ε

$$\boxed{\alpha \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{2\varepsilon^2}{\pi}\right)}}$$

Яворский В А, Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторным работам. Москва: 2011.

Таблица. Значения вероятности того, что измеренная величина принимает значения из интервала, длина которого Δx пропорциональна σ

	Интервал	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$
1	$\bar{x} - \sigma \le x \le \bar{x} + \sigma$	0.68	1
2	$\bar{x} - 1{,}65\sigma \le x \le \bar{x} + 1{,}65\sigma$	0.90	1,65
3	$\bar{x} - 2\sigma \le x \le \bar{x} + 2\sigma$	0.95	2,0
4	$\bar{x} - 2{,}6\sigma \le x \le \bar{x} + 2{,}6\sigma$	0.99	2,6
5	$\bar{x} - 3\sigma \le x \le \bar{x} + 3\sigma$	0.997	3,0
6	$\bar{x} - 3{,}3\sigma \le x \le \bar{x} + 3{,}3\sigma$	0.999	3,3

Яворский В А, Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторным работам. Москва: 2011.

Правило «3 сигм»

Видно, что результат измерения с вероятностью около 68% попадет в интервал (x-σ, x+ σ) , т.е. примерно каждое третье измерение даст результат за пределами этого интервала. За пределами интервала (x-2σ, x+ 2σ) окажется 5% результатов, а для интервала (x-3σ, x+ 3σ) только один из трехсот. Значит, интервал (x-3σ, x+ 3σ) является почти достоверным, так как подавляющее большинство отдельных результатов многократного измерения случайной величины окажется сосредо точенным именно в нем.).

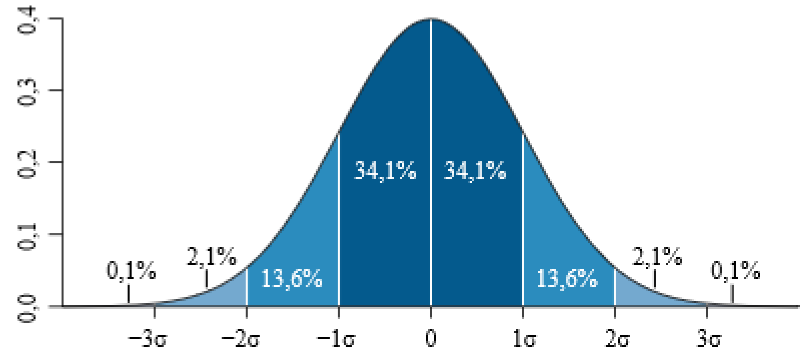


График плотности вероятности нормального распределения и процент попадания случайной величины на отрезки, равные среднеквадратическому отклонению.

При обработке результатов эксперимента часто используется «правило 3 σ», или правило «трех стандартов», которое основано на указанном свойстве нормального распределения. С учетом проведенного выше анализа можно установить на личие промаха в результате отдельного измерения, а значит, **отбросить его**, если результат измерения более чем на 3 σ отличается от измеренного среднего значения случайной ве личины. Если же истинная величина *a* неизвестна, то следует пользоваться не σ , а *s*. Таким образом, правило трёх сигм преобразуется в правило трёх *s* (Правило трех стандартов).

Стандартные отклонения и стандартное отклонение среднего

Подсчитаем стандартную ошибку среднего арифметического значения величины *x*. Понятно, что можно померить среднее значение несколько (много) раз. Пусть искомая величина измерялась *n* раз и результаты измерения были $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$. Очевидно, что распределение полученных средних значении также будет нормальным, однако дисперсия будет от стандартного отклонения *s*.

$$\boxed{s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

Введен стандартное отклонение среднего $s_{\bar{x}}$. Можно показать,что

$$\boxed{s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_n^2}{n}, s_{\bar{x}} = \frac{s_n}{\sqrt{n}}}$$

Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа измерений.

Стандартные отклонения и стандартное отклонение среднего

Если случайная величина z измеряется косвенно и $z = x \pm y$, где x, y - не зависимо измеряемые случайные величины со средне-квадратичной ошибкой s_x и s_y соответственно, то средне-квадратичная ошибка величины z находится по формуле:

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 \qquad (1)$$

Пусть x_1, x_2, . . . , x_n - результаты отдельных равноточных измерений (с одинаковой точностью) с дисперсией $\sigma \approx Sn$. Среднее арифметическое $\bar{x} = x_1/n + x_2/n + \cdot\cdot\cdot + x_n/n$. Тогда в соответствии с уравненеием (1)

$$s_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{s_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{s_n}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{s_n}{n}\right)^2 = \frac{s_n^2}{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_{\bar{x}} = \frac{s_n}{\sqrt{n}}}$$

Видно, что с увеличением числа измерений погрешность окончательного результата уменьшается. Однако повышение точности никогда не дается бесплатно. Так, чтобы узнать дополнительную цифру в $\bar{x}$, т.е. повысить точность в 10 раз, количество измерений необходимо увеличить в 100 раз!

Доверительная вероятность

Если же отнести доверительный интервал к многократному измерению, то под дисперсией необходимо подразумевать среднее квадратичное отклонение окончательного результата многократного измерения, т.е. $s_{\bar{x}}$

Тогда доверительная вероятность вычисляется по формуле

$$\alpha = P(\bar{x} - \varepsilon \cdot s_{\bar{x}} \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon \cdot s_{\bar{x}})$$

Где стандартное отклонение следует поделить $n^{1/2}$.

$$\alpha = P(\bar{x} - \varepsilon \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$$

Яворский В А, Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторным работам. Москва:. 2011.

Распределение Стьюдента

На практике число измерений ограничено (чаще всего не более 5-7).В этом случае пользуются распределением Стьюдента. Английский математик и химик В.С. Госсет (псевдоним Стьюдент) в 1908 г. предложил методику обработки результатов многократных измерений одной и той же величины. В 1908 году Стьюдент показал, что статистических подход справедлив и при малом числе измерений. Распределение Стьюдента при числе измерений n → ∞ переходит в распределение Гаусса, а при малом числе отличается от него. Для расчета абсолютной ошибки при малом количестве измерений вводится специальный коэффициент, зависящий от надежности α и числа измерений *n*, называемый коэффициентом Стьюдента *t*.

$$\boxed{\Delta x = t(\alpha, n) \cdot s_{\bar{x}}}$$

$t(\alpha,n)$– коэффициенты, зависящие от полного количества измерений *n* и заданного значения доверительной вероятности α. Величины $t(\alpha,n)$ носят название коэффициентов Стьюдента. Значения коэффициентов Стьюдента для различных α, и *n* можно расчитать по формуле.

$$t(\alpha,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{\alpha^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

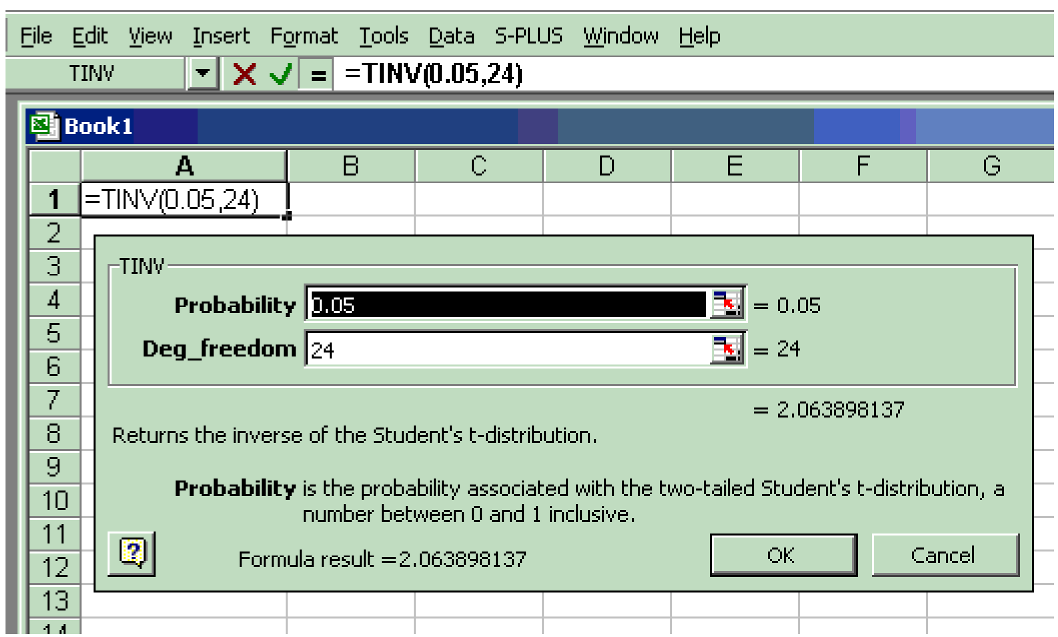
Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$ для доверительной вероятности α (n – количество измерений)

n	***α***			
	0,68	0,95	0,99	0,999
2	2,0	12,7	63,7	636,6
3	1,4	4,3	9,9	31,6
4	1,3	3,2	5,8	12,9
5	1,2	2,8	4,6	8,6
6	1,2	2,6	4,0	6,9
7	1,1	2,4	3,7	6,0
8	1,1	2,4	3,5	5,4
9	1,1	2,3	3,4	5,0
10	1,1	2,3	3,3	4,8

Коэффициенты Стьюдента на Excell

Коэффициент Студента может быть рассчитан используя программы Excell и Matlab. В Excell есть функция под названием TINV, имеющая два аргумента: “Probability” и “Deg_freedom”. Для вычисления $t(\alpha,n)$ надо запустить функцию TINV и вставить значения $(1-\alpha)$ в окно Probability, и $n-1$ в окно Deg_freedom.

Пример: Найти коэффициент Студента для n-1=24 и $\alpha=0.95$. Для этого введите $1-\alpha = 0.05$ окно «Probability» и 24 в окно «Deg_freedom». $t(\alpha,n) = 2.06$.



Расчет среднего и доверительного интервала

1. Пусть есть n измерений величины x. Тогда среднее значение $\bar{x}$ определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2. Второй шаг – это расчет стандартного или среднеквадратичного отклонения по формуле:

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

3. Следующий шаг - определение Δx доверительного интервала при выбранной доверительной вероятности α. Коэффициентом Стьюдента $t(\alpha,n)$ определяется из таблицы или вычисляется.

$$\Delta x = t(\alpha, n) \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

Тогда можно сказать, что при выбранной доверительной вероятности (надежности) α, *результат измерения случайной величины* x, *n*редставляется в виде

$$\bar{x} - \Delta x \le x \le \bar{x} + \Delta x$$

Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Пусть исследуемую q величину определяют по результатам прямых измерений других независимых физических величин математическим соотношением

$$q = f(x, y, z))$$

Если известны окончательные результаты прямых измерений,

$$\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y, \bar{z} + \Delta z$$

и предполагается , что величины x, y, z являются случайными и к ним применимо нормальное распределение. Тогда для среднего значения величины q имеем

$$\boxed{\bar{q} = f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{z})}$$

Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Для погрешности

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2}$$

Частные производные берутся в точке $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

Следует помнить, что при непосредственных расчетах в формулу необходимо подставлять погрешности Δx, Δy, Δz, найденные для одного и того же значения доверительной вероятности. Погрешность косвенного измерения s также будет соответствовать этому значению доверительной вероятности. Например

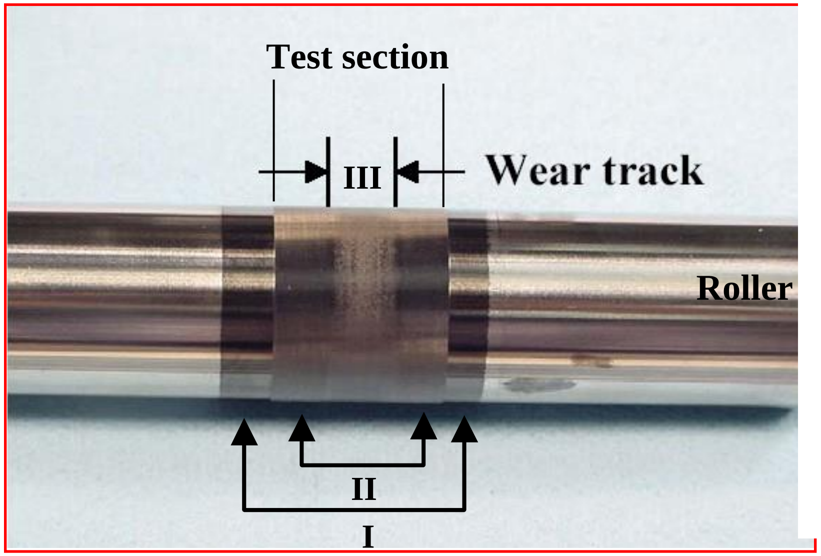
$$q = x \cdot y$$

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

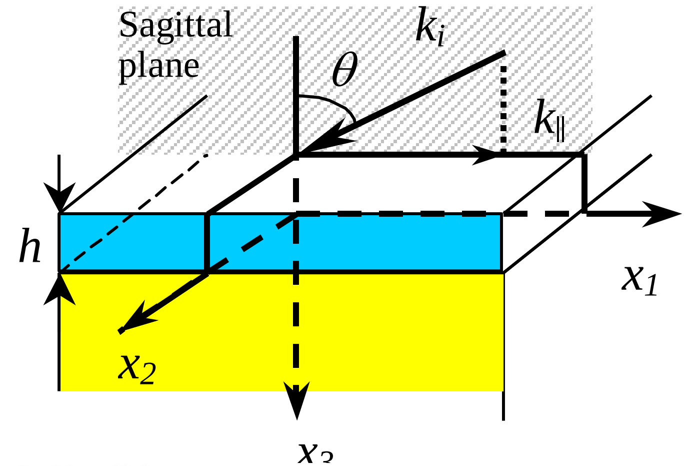
Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

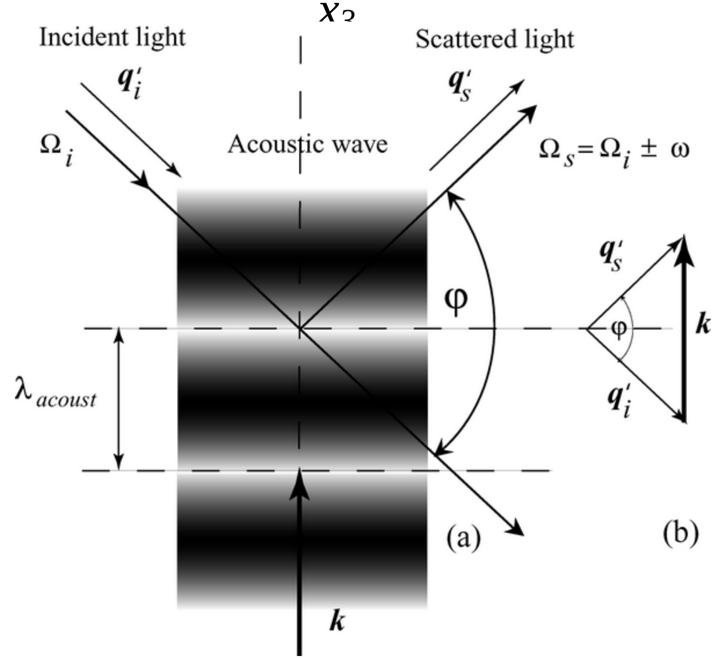
Рабочая зависимость	Формула погрешности
$q = Ax + By$	$\Delta q = \sqrt{(A \cdot \Delta x)^2 + (B \cdot \Delta y)^2}$
$q = Ax^{\pm\alpha} y^{\pm\alpha}$	$\Delta q / q = A\sqrt{(\alpha \cdot \Delta x)^2 + (\beta \cdot \Delta y)^2}$
$q = \ln x$	$\Delta q = \Delta x / x$
$q = e^x$	$\Delta q / q = \Delta x$
$q = A \sin x$	$\Delta q = A \cos x \Delta x$

Пример: определение упругих свойств алмазных пленок



Тестовый образец

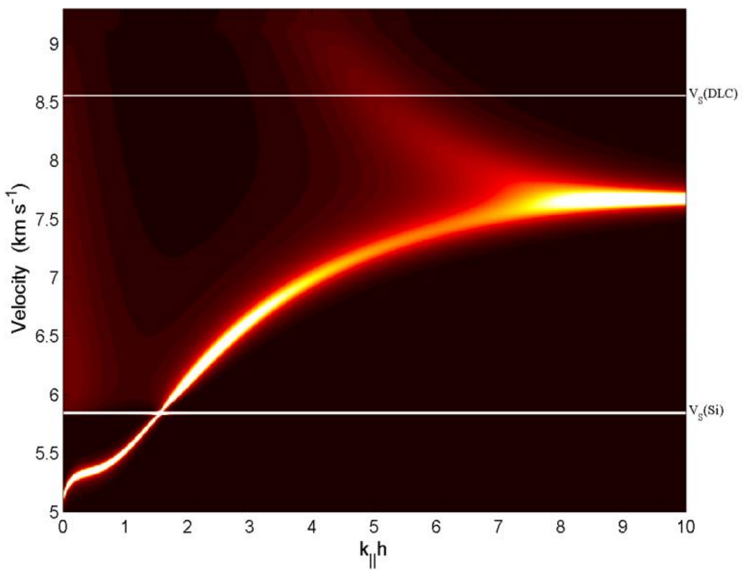




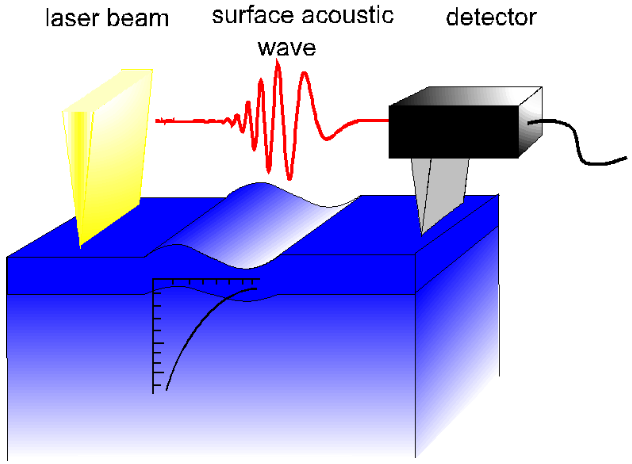
Принципиальная схема взаимодействия тепловых фононов с лазерным лучом. Рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.

S. Berezina, P. V. Zinin, D. Schneider, D. Fei, and D. A. Rebinsky. “Combining Brillouin spectroscopy and laser-SAW technique for elastic property characterization of thick DLC films”. *Ultrasonics*. **43(**2) 87 – 93 (2004).

Пример по теме: Расчёт относительной погрешности косвенных измерений



Фигура 1. Дисперсия поверхностных акустических волн, рассчитанная для 2.9 μm алмазо-подобной пленки на стали.



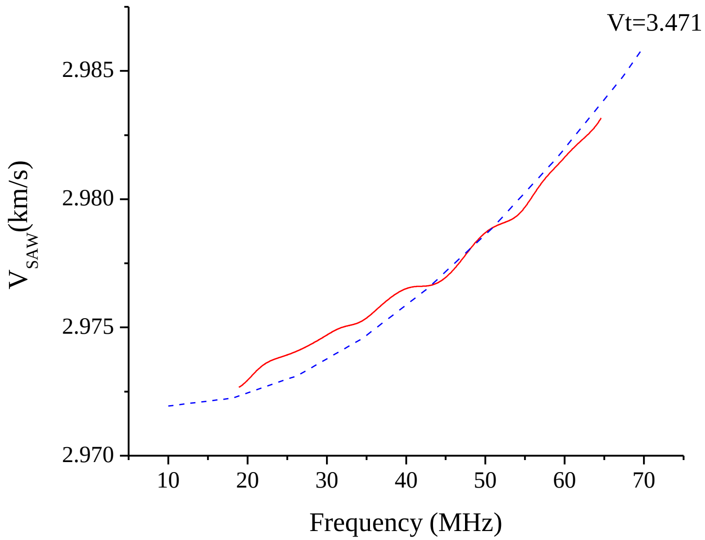
Фигура 2. Смеха измерений поверхностных волн методом лазерного ультразвука (LU).

В тонких пленках упругие свойства можно померить исследуя зависимость скорости поверхностных акустических волн (ПАВ) в таких пленках от частоты или дисперсионные кривые ПАВ. В приведенном примере дисперсионная зависимость измерялась методом LU в интервале $0 < kh < 1$. Метод спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна использовался для измерения скорости Рэлеевской волны, V_R, $kh > 8$.

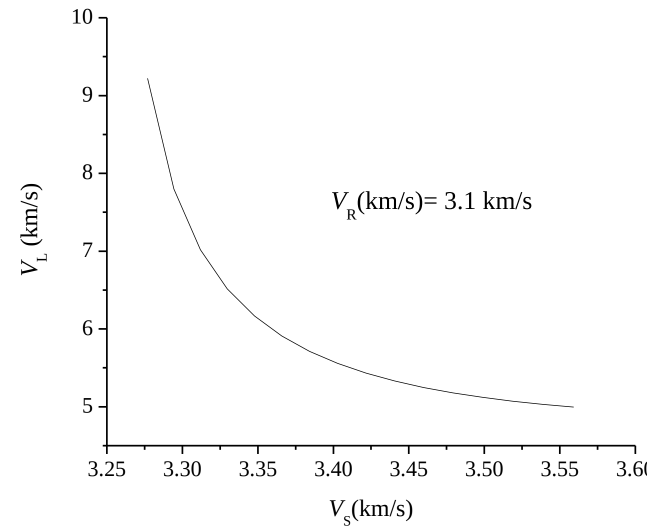
S. Berezina, P. V. Zinin, D. Schneider, D. Fei, and D. A. Rebinsky. “Combining Brillouin spectroscopy and laser-SAW technique for elastic property characterization of thick DLC films”. *Ultrasonics*. **43(**2) 87 – 93 (2004).

Пример: определение упругих свойств алмазоподобных пленок

Задача – определить упругие константы алмазоподобных пленок и оценить ошибки их определения из акустических измерений.



Дисперсионная кривая поверхностной акустической волны (SAW) образца с Cr-DLC покрытием. Сплошная линия результат измерения при помощи установки лазерного ультразвука, штриховая линия – получена с помощью метода наименьших квадратов.



Скорость продольной акустической волны V_L Cr-DLC пленки как функция скорости сдвиговой волны V_S при фиксированном значении скорости Рэлеевской волны, V_R = 3.1 km/s.

S. Berezina, P. V. Zinin, D. Schneider, D. Fei, and D. A. Rebinsky. "Combining Brillouin spectroscopy and laser-SAW technique for elastic property characterization of thick DLC films". *Ultrasonics*. **43(**2) 87 – 93 (2004).

Пример: определение упругих свойств алмазных пленок

Подгонка экспериментальной дисперсионной зависимости скорости поверхностной акустической волны от частоты для следующие значения 3.47 km/s для V_S and 5.21 km/s для V_L. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона пленки были рассчитаны с использованием двух скоростей и плотности пленки, измеренному ранее.

$$V_L(V_S) = V_S \sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{V_R}{V_S}\right)^2}{1-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{V_R}{V_S}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_R}{V_S}\right)^4-\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{V_R}{V_S}\right)^6}} \quad (1)$$

$$E = \frac{\rho V_S^2\left(3V_L^2-4V_S^2\right)}{V_L^2-V_S^2}, \nu = \frac{\left(V_L^2-2V_S^2\right)}{2\left(V_L^2-V_S^2\right)} \quad (2)$$

Модуль Юнга пленки составил 68.9 ГПа, а коэффициент Пуассона пленки - 0.1. Необходимо рассчитать относительные погрешность для этих величин. Используя формулу для относительной погрешности:

$$\boxed{\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\frac{\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{x=\bar{x}}}{f(x)}\left(\Delta x\right)^2}}$$

S. Berezina, P. V. Zinin, D. Schneider, D. Fei, and D. A. Rebinsky. “Combining Brillouin spectroscopy and laser-SAW technique for elastic property characterization of thick DLC films”. *Ultrasonics*. **43(**2) 87 – 93 (2004).

Пример: определение упругих свойств алмазных пленок

В приведенных экспериментах наибольший вклад в ошибку дают измерения поверхностной Релеевской волны, V_R, методом спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна. Точность измерения поверхностной спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна не может быть лучше, чем 1%. Это ошибка определяет точность метода, предложенного в статье.

Можно использовать уравнение (1) для оценки определения $V_{L.}$ Вносимой ошибкой определения V_R, которая была измерена методом спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна: $\delta V_L = dV_L/dV_R * \delta V_R|_{VR=3.1\ \mathrm{km/s}}$. С учетом того, что точность измерений поверхностной спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна 1%, i.e. , и $dV_L/dV_R = 5.5$, то относительная ошибка определения продольной волны равна $\delta V_L/V_L = 3.3\%$. Аналогично можно оценить ошибки определения модуля Юнга (E) and коэффициента Пуассона (ν). Используя (1) и (2), $dE/dV_R|_{VR=3.1\ \mathrm{km/s}} = 97$ и $d\nu/dV_R|_{VR=3.1\ \mathrm{km/s}} = 1.6$, получим 4.4% для модуля Юнга ($\delta E/E$) и 46% для коэффициента Пуассона ($\delta\nu/\nu$).

Домашнее чтение

1. **Ефимова А.И., Зотеев А.В., Склянкин А.А.** Общий физический практикум физического факультета МГУ. Погрешности эксперимента: Учебно-методическое пособие. – М.: МГУ, Физический факультет, 2012. – 39 с., илл.
2. **Диденко, Л.Г., Керженцев, В.В.** Математическая обработка и оформление результатов эксперимента Издательство: М.: МГУ Переплет: мягкий; 110 страниц; 1977 г.
3. **Яворский В. А.** Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторным работам. Москва: Московский физико-технический институт (государственный университет). Факультет молекулярной и биологической физики. 2011.
4. **Иверонова В. И**., *Физический практикум*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

Home work

1. Найти объект для измерения, провести до 10 измерений , найти среднее измеряемой величины, нормальное отклонение, а также доверительный интервал.
2. Написать Matlab или Excell программу расчета среднего значения, нормального отклонения и доверительного интервала для серии измерений .