

Физические методы исследования состава и структуры веществ

Часть I : Теория ошибок измерений

Теория ошибок и обработка результатов эксперимента I

Классификация ошибок измерения, среднее значение, стандартное отклонение, нормальное распределение, доверительная вероятность, доверительный интервал, распределение Стьюдента, ошибки косвенных измерений



Павел В. Зинин



Погрешности

Цель данной лекции – предложить алгоритм обработки результатов экспериментальных работ. Прежде всего необходимо научиться оценивать погрешности проводимых экспериментов. **Различают систематические, включая приборные, и случайные погрешности**

- 1. Систематические погрешности** обусловлены *факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении* одних и тех же измерений. Они вызывают отклонение измеренного значения от истинного всегда в одну и ту же сторону – либо в большую, либо в меньшую.
- 2. Приборными** называются погрешности, *обусловленные принципиальным несовершенством и ограниченной точностью* изготовления и градуировки технических устройств, используемых для измерений.
- 3. Случайными** называются погрешности, которые при многократных измерениях в одинаковых условиях изменяются непредсказуемым образом. Случайные погрешности обусловлены *множеством неконтролируемых факторов*, действие которых различно при повторении измерений. В результате этого при измерении одной и той же величины несколько раз подряд в одинаковых условиях получается ряд различных значений этой величины, отличающихся от истинного значения случайным образом как в большую, так и в меньшую сторону.

Систематические погрешности

Систематические ошибки обычно приводят к тому, что результаты измерений постоянно оказываются слишком высокими или слишком низкими, ниже истинного (или фактического) значения. Эти ошибки могут быть уменьшены путем хорошо спланированных экспериментов и хорошего оборудования. Как правило, ошибки возникают из-за:

- 1. Погрешность метода** – погрешность, вызванная несовершенством применяемого при измерении метода. Применение соответствующих "корректировок" или "поправок" к показаниям уменьшает систематические ошибки.
- 2. Погрешность модели** - чрезмерного упрощения теоретической модели, когда все переменные, влияющие на систему, не принимаются во внимание. Пример: метод Мандельштама-Бриллюэна используемый для измерений скорости звука справедлив для основан на использовании плоских волн. В реальности используются слабо сфокусированные лазерные пучки.
- 3. Внешние условия.** Отличия условий окружающей среды во время измерений от стандартных условий, используемых для калибровки прибора. Эти отклонения должны быть компенсированы, чтобы свести к минимуму систематические.

Приборные погрешности

- 1. Приборными** называются погрешности, обусловленные принципиальным несовершенством и ограниченной точностью технических устройств, используемых для измерений. Приборные погрешности связаны с точностью изготовления прибора, используемого для измерения. Они могут носить как систематический, так и случайный характер.
 - Предполагая, что приборные погрешности, имеющие систематический характер, устранены (весы выставлены по отвесу и уравновешены в отсутствие нагрузки, стрелка отключённого электроизмерительного прибора показывает на нуль и т.д.), мы все приборные погрешности будем относить к случайным. Такие погрешности могут возникать при изготовлении и приборов или при их градуировке. Изготовитель ручается, что погрешности от счета по прибору не выходят за пределы, указываемые в паспорте. Поэтому такие погрешности следует относить к случайным погрешностям с достаточно большой доверительной вероятностью (порядка 0,95 и выше). Примеры:
 1. Неточная установка прибора перед измерением
 2. Секундомер, используемый при измерениях, отстаёт или спешит.

Митин И.В., Русаков В.С. «Анализ и обработка экспериментальных данных». Москва 1998

Пустовалов Г.Е. Погрешности измерений. МГУ. 2001

Случайные погрешности. Среднее значение

Теория ошибок это научная дисциплина, которая имеет целью определение наиболее надежных результатов измерений в экспериментальных науках. Ее можно считать соответствующим приложением статистического метода.

Теория погрешностей базируется на постулате К. Гаусса: если учитывать только случайные погрешности, то наиболее вероятным значением искомой величины a является значение среднего арифметического, \bar{x} , полученного в результате многократных измерений, x_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

где n – число измерений. Чем больше число измерений, тем ближе среднее арифметическое значение к истинному.



Карл Фридрих Гаусс

Случайные погрешности: Среднее и стандартное отклонение

Наименьшее расстояние, на котором глаз видит предмет, практически не напрягаясь, называют расстоянием наилучшего зрения. Для людей с нормальным зрением это расстояние равно приблизительно 25 см. Именно на таком расстоянии человек с хорошим зрением читает книгу. Мы провели измерение расстояний наилучшего зрения среди студентов нашей группы и получили результаты

43, 38, 30, 38, 57, 46, 45, 24

где для удобства единицы измерения измеренных значений опущены. Что мы должны принять за наилучшую оценку нашей величины?

Представляется разумным, чтобы нашей наилучшей оценкой было среднее значение, или среднее пяти найденных значений. Таким образом,

$$x_{\text{наил}} = \bar{x} = \frac{43 + 38 + 30 + 38 + 57 + 46 + 45 + 24}{8} = 40.125$$

Стандартные ошибки и стандартные отклонения

Ошибка

$$e_i = x_i - a$$

это разницы между измерением x_i и истинным значением измеряемой величины a .

Отклонение

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

это отклонение измерения x_i от среднего значения. Определение стандартные ошибки и стандартные отклонения определяются по разному. Квадрат стандартной ошибки определяется как

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{n} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2}{n}$$

Очевидно, что стандартную ошибку нельзя определить из нескольких измерений, т.к. мы не знаем истинное значение измеряемой величины a .

Среднеквадратичное или стандартное отклонение

Чтобы оценить достоверность результатов измерений в среднем естественно попытаться усреднить отклонения. К сожалению среднее значение отклонений равно нулю. На самом деле так будет в случае любого набора результатов измерений, поскольку уже само определение среднего значения ведет к тому, что Δx_i иногда положительны, а иногда отрицательны таким образом, чтобы среднее было равно нулю. Очевидно поэтому, что среднее отклонений — это не лучшая характеристика достоверности результатов измерений.

Лучший способ обойти эту неприятность - это возвести все отклонения в квадрат, а затем усреднить эти числа. Если мы теперь извлечем квадратный корень из полученного результата, то получим величину, которая измеряется в тех же единицах, что и сама величина среднего. Это число называется среднеквадратичной ошибкой и обозначается как s' :

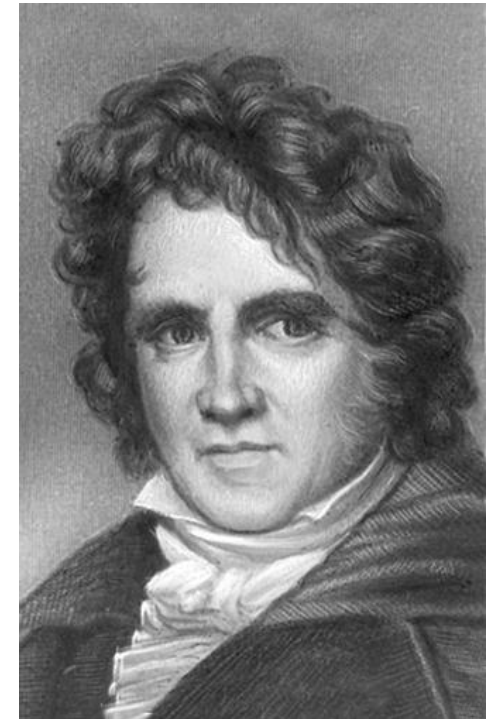
$$s'_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}}$$

Стандартное отклонение

Если при исследовании анализируется не весь массив имеющихся данных, а определенная выборка, то для расчета величины выборочного *среднеквадратического отклонения* или *стандартного отклонения отдельного измерения* используется следующая формула

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{(n-1)}}$$

Коэффициент, $n-1$, появляется в связи с конечным количеством экспериментов. В этом случае вычисленное среднее значение отличается от предельного (получаемого при $n \rightarrow \infty$), и такая поправка дает возможность получить несмещенную оценку для дисперсии.



Фридрих Вильгельм БЁССЕЛЬ

Случайные погрешности: Взаимосвязь со статистикой и теорией вероятностей

Можно ли теперь записать

$$x = \bar{x} \pm s_n$$

Кноблех (1990) указал, что теория ошибок возникла ввиду стремления объяснить природу в математических терминах и необходимости повысить точность экспериментальных наук, равно как и вследствие развития теории вероятностей.

Далее. Случайные ошибки представляют собой частный случай случайных величин, так что вероятностная теория ошибок существенно зависит от теории вероятностей, чье развитие с середины XVIII в. и, пожалуй, до 1920х годов в основном определялось необходимостью обосновывать и совершенствовать математическую обработку наблюдений. Многие фвторы полагают, что теория ошибок есть приложение статистического метода к обработке наблюдений в экспериментальных науках. Добавим, что теория вероятностей обобщила понятие случайной ошибки наблюдения, приняв взамен случайную величину, а математическая статистика переняла у теории ошибок дисперсию и принципы наибольшего правдоподобия и наименьшей дисперсии.

Нормальное распределение

В теории случайных ошибок измерений важное значение имеет нормальный закон распределения или функция Гаусса. Он справедлив, когда действуют сразу несколько источников ошибок, и ни один из них не доминирует; при этом каждый источник вносит лишь малую долю в общую ошибку. Впервые нормальный закон был обнаружен в XIX веке в применении к теории ошибок измерения Лапласом и Гауссом. После доказательства Ляпуновым центральной предельной теоремы, стало ясным, почему нормальный закон широко распространен в технике, биологии, и физике.

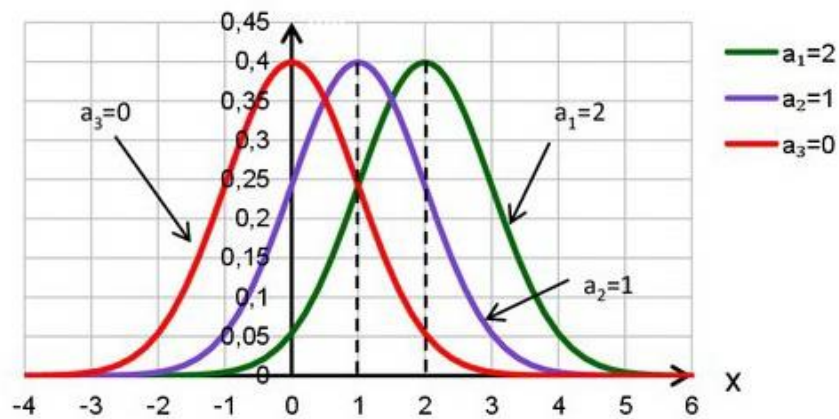
Непрерывная случайная величина x называется распределенной по нормальному закону, если распределение её плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

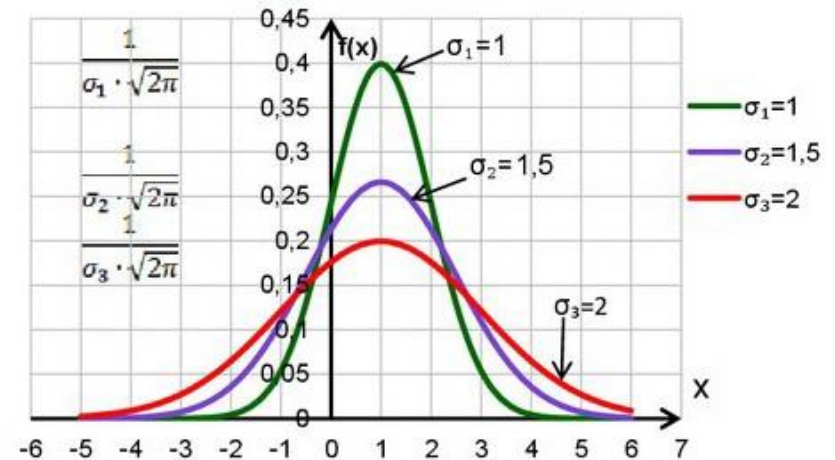
где a – математическое ожидание случайной величины x , σ - дисперсия. Формула Гаусса была выведена из следующих соображений: (1) ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений; (2) при большом числе наблюдений ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто; (3) частота появления ошибок уменьшается с увеличением величины ошибки. (А.Н. Зайдель. « Ошибки измерений физических величин», 2009)

Нормальное распределение

Графики плотности распределения с разными значениями параметра a .
($\sigma=1$)



Графики плотности распределения с разными значениями параметра σ .
($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, $a=1$)



Доверительная вероятность

Вероятность того, что результат измерения попадет в интервал $[x_1, x_2]$, равна:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

В скобках после P указано событие, для которого вычислена вероятность. При увеличении границ промежутка в обе стороны до бесконечности интеграл от функции распределения равно $P(-\infty; +\infty) = 1$, т.е. попадание результата измерения в диапазон $(-\infty; +\infty)$ является достоверным событием. При выбранной доверительной вероятности P , x лежит в пределах

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon S_n,$$

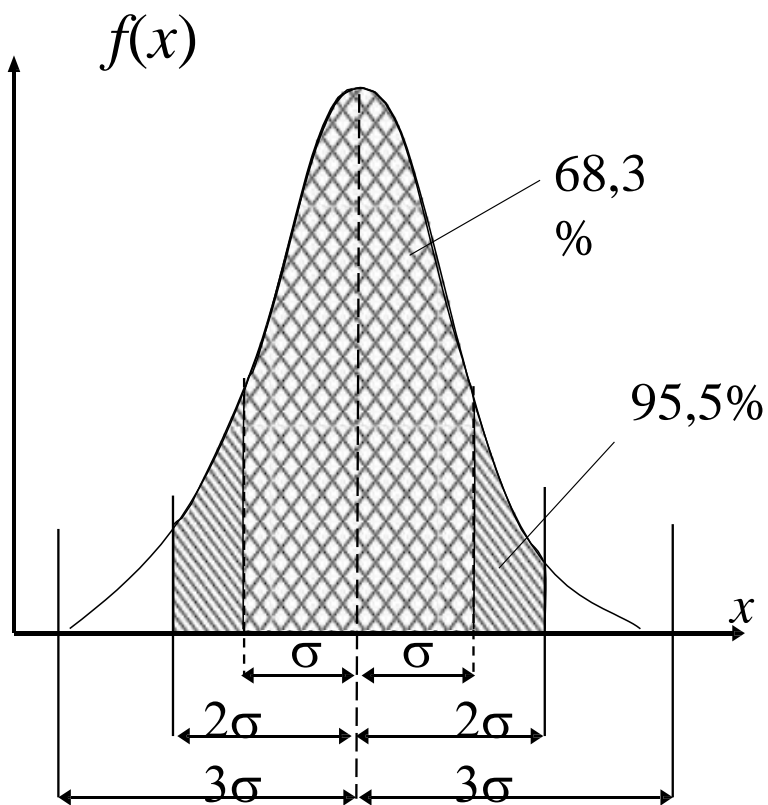
где ε зависит от доверительной вероятности P .

В период до XVIII века стали известны существенные источники ошибок наблюдений и общие меры, предохраняющие от их влияния или сводящие его к минимуму. XVIII в. благодаря работам Лапласа появились дифференциальные формулы оценки точности геодезических сетей, на этой же основе начало изучаться влияние ошибок наблюдений и инструментальных ошибок, были явно выделены понятия о систематических и случайных ошибках. Гаусс и Бессель: началась охота на ошибки. И приборы, и методы наблюдений стали считаться негодными, пока и поскольку не заканчивалось их тщательное исследование и не обнаруживались меры по устранению (по сведению к минимуму) выявленных погрешностей.

Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$$



$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

График плотности вероятности нормального распределения и процент попадания случайной величины на отрезки, равные среднеквадратическому отклонению.

Вычисление интеграла нормального распределения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$J = I / (2\sqrt{2}), K = I / \sqrt{2}$$

$$J^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\varphi$$

$$J^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Таблица. Значения вероятности того, что измеренная величина принимает значения из интервала, длина которого Δx пропорциональна σ

	Интервал	α	ε
1	$\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma$	0.68	1
2	$\bar{x} - 1,65\sigma \leq x \leq \bar{x} + 1,65\sigma$	0.90	1,65
3	$\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma$	0.95	2,0
4	$\bar{x} - 2,6\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2,6\sigma$	0.99	2,6
5	$\bar{x} - 3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma$	0.997	3,0
6	$\bar{x} - 3,3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3,3\sigma$	0.999	3,3

У физиков общепринято

У физиков общепринято приводить экспериментальные данные в виде величины (x плюс или минус одно среднее квадратичное отклонение, т. е.

$$x = \bar{x} \pm \sigma \quad (1)$$

Если \bar{x} имеет нормальное распределение, то $P = 0,683$ при $\epsilon = \sigma$. Это значит, что утверждение, содержащееся в (31), может оказаться несправедливым примерно в одной трети всех случаев его применения. С другой стороны, утверждение

$$x = \bar{x} \pm 2 \cdot \sigma$$

будет несправедливым уже только в одной двадцатой всех случаев. Запись (1) удобна, поскольку она содержит обе величины: \bar{x} и σ , но необходимо иметь в виду, что ей соответствует невысокая доверительная вероятность (0,683). Если величина σ сама оценена из результатов эксперимента, то доверительная вероятность становится ещё ниже.

Центральная предельная теорема

Чем больше проведено испытаний (n), тем лучше выполняется это утверждение, т.е

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = a$$

Оказывается, что при сколь угодно большом числе измерений, среднеквадратичная отклонение стремится к дисперсии:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sigma$$

и чем больше n , тем точнее равенство: $s \approx \sigma$. Очевидно, что из опыта мы можем найти только s .

Центральная предельная теорема позволяет утверждать, что всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом. А поскольку случайные величины всегда порождаются бесконечным количеством причин и чаще всего ни одна из них не имеет дисперсии, сравнимой с дисперсией самой случайной величины, то большинство встречающихся в практике случайных величин подчинено нормальному закону распределения



Александр Михайлович Ляпунов

Доверительный интервал и доверительная вероятность

Задача обработки результатов измерений заключается в том, чтобы определить границы, в которых заключено истинное значение измеряемой величины. При измерениях в учебной лаборатории характеристики допускаемой погрешности заранее не установлены, и границы погрешности оцениваются в ходе самих измерений. В таких случаях результат измерения рекомендуется представлять *доверительным интервалом*, накрывающим с известной (указываемой) *доверительной вероятностью* истинное значение измеряемой величины.

$$x = \bar{x} \pm \Delta x; P = 0,95,$$

где x – результат измерения; \bar{x} – среднее арифметическое значение; $\pm \Delta x$ – доверительные границы погрешности; P – доверительная вероятность. Доверительным называется интервал, в который попадают измеренные в эксперименте значения, соответствующие *доверительной вероятности*.

Эта запись означает, что интервал $(- \Delta x, + \Delta x)$ с вероятностью P содержит погрешность измерений. Это равносильно тому, что истинное значение величины x_0 находится в интервале от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ с доверительной вероятностью P .

Доверительный интервал и доверительная вероятность

Пусть время кокого-то процесса представлен в виде

$$t = (470 \pm 5) \text{ с}; P = 0,95.$$

Это означает, что не менее 95% значений t , получаемых при многократном повторении измерений этой величины, попадут в указанный интервал (от 465 до 475 с).

Запись $x = \bar{x} \pm \Delta$ не имеет смысла, пока не указана доверительная вероятность. При однократном измерении доверительный интервал определяется предельной погрешностью средства измерения, а соответствующую доверительную вероятность ($P = 0,997$) обычно не указывают. Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины лежит внутри некоторого интервала, называется **доверительной вероятностью**, или **коэффициентом надежности**, а сам интервал - **доверительным интервалом**.

Правило «3 сигм»

Видно, что результат измерения с вероятностью около 68% попадет в интервал $(x - \sigma, x + \sigma)$, т.е. примерно каждое третье измерение даст результат за пределами этого интервала. За пределами интервала $(x - 2\sigma, x + 2\sigma)$ окажется 5% результатов, а для интервала $(x - 3\sigma, x + 3\sigma)$ только один из трехсот. Значит, интервал $(x - 3\sigma, x + 3\sigma)$ является почти достоверным, так как подавляющее большинство отдельных результатов многократного измерения случайной величины окажется сосредоточенным именно в нем.).

При обработке результатов эксперимента часто используется «правило 3 σ », или правило «трех стандартов», которое основано на указанном свойстве нормального распределения. С учетом проведенного выше анализа можно установить на личие промаха в результате отдельного измерения, а значит, **отбросить его**, если результат измерения более чем на 3 σ отличается от измеренного среднего значения случайной величины. Если же истинная величина a неизвестна, то следует пользоваться не σ , а s . Таким образом, правило трёх сигм преобразуется в правило трёх s (Правило трех стандартов).

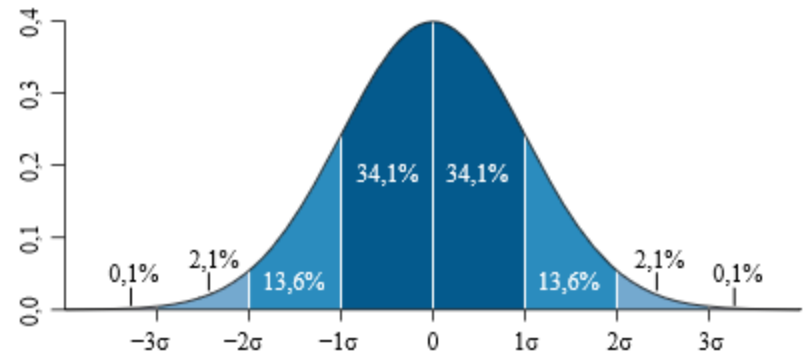


График плотности вероятности нормального распределения и процент попадания случайной величины на отрезки, равные среднеквадратическому отклонению.

Стандартные отклонения и стандартное отклонение среднего

Подсчитаем стандартную ошибку среднего арифметического значения величины x . Понятно, что можно померить среднее значение несколько (много) раз. Пусть искомая величина измерялась n раз и результаты измерения были $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$. Очевидно, что распределение полученных средних значений также будет нормальным, однако дисперсия будет от стандартного отклонения s .

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Введен стандартное отклонение среднего $s_{\bar{x}}$. Можно показать, что

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_n^2}{n}, s_{\bar{x}} = \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа измерений.

Стандартные отклонения и стандартное отклонение среднего

Если случайная величина z измеряется косвенно и $z = x \pm y$, где x, y - не зависимо измеряемые случайные величины со средне-квадратичной ошибкой s_x и s_y соответственно, то средне-квадратичная ошибка величины z находится по формуле:

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 \quad (1)$$

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n - результаты отдельных равноточных измерений (одинаковой точностью с дисперсией $\sigma = S_n$). Среднеарифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$$

Тогда, уравнение (1) может быть переписано

$$s_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = \frac{S_n^2}{n} \Rightarrow s_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Видно, что с увеличением числа измерений погрешность окончательного результата уменьшается. Однако повышение точности никогда не дается бесплатно. Так, чтобы узнать дополнительную цифру в \bar{x} , т.е. повысить точность в 10 раз, количество измерений необходимо увеличить в 100 раз!

Доверительная вероятность

Если же отнести доверительный интервал к многократному измерению, то под дисперсией необходимо подразумевать среднее квадратичное отклонение окончательного результата многократного измерения, т.е. $S_{\bar{x}}$

Тогда доверительная вероятность вычисляется по формуле

$$\alpha = P(\bar{x} - \varepsilon \cdot s_{\bar{x}} \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon \cdot s_{\bar{x}})$$

Где стандартное отклонение следует поделить $n^{1/2}$.

$$\alpha = P(\bar{x} - \varepsilon \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$$

Распределение Стьюдента

На практике число измерений ограничено (чаще всего не более 5-7). В этом случае пользуются распределением Стьюдента. Английский математик и химик В.С. Госсет (псевдоним Стьюдент) в 1908 г. предложил методику обработки результатов многократных измерений одной и той же величины. В 1908 году Стьюдент показал, что статистический подход справедлив и при малом числе измерений. Распределение Стьюдента при числе измерений $n \rightarrow \infty$ переходит в распределение Гаусса, а при малом числе отличается от него. Для расчета абсолютной ошибки при малом количестве измерений вводится специальный коэффициент, зависящий от надежности α и числа измерений n , называемый коэффициентом Стьюдента t .

$$\Delta x = t(\alpha, n) \cdot s_{\bar{x}}$$

$t(\alpha, n)$ – коэффициенты, зависящие от полного количества измерений n и заданного значения доверительной вероятности α . Величины $t(\alpha, n)$ носят название коэффициентов Стьюдента. Значения коэффициентов Стьюдента для различных α , и n можно рассчитать по формуле.

$$t(\alpha, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Распределение Стьюдента

Данный критерий был разработан **Уильямом Сили Госсетом** для оценки качества пива в компании Гиннесс. В связи с обязательствами перед компанией по неразглашению коммерческой тайны, статья Госсета вышла в 1908 году в журнале «Биометрика» под псевдонимом «Student» (Студент). о этому поводу сделал определенные выводы **Уильям Госсет**, который работал на пивоваренном заводе Гиннеса в Дублине. Свои работы он опубликовал под псевдонимом Стьюдент, так как завод считал его метод интеллектуальной собственностью Гиннеса и не хотел, чтобы конкуренты узнали, что они применяют статистические методы для контроля качества. Основная идея Госсета состояла в том, что зная среднее значение небольшой выборки можно было найти промежуток, где с большой вероятностью находится среднее значение генеральной совокупности. Госсет отметил, что если генеральная совокупность нормально распределена, то имея выборку малого размера, можно строить следующее распределение.

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$



Уильям Госсет

Распределение Стьюдента

Пусть, x_1, \dots, x_n , независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

и \bar{x} есть выборочное среднее

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

s_n - несмещённая оценка дисперсии

Распределение Стьюдента с k степенями свободы может быть определено как распределение случайной величины t

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Распределение статистики критерия t , зависит от $k = (n-1)$, но не зависит от μ или σ^2 , что и делает распределение важным как в теории, так и на практике. Госсет интуитивно получил плотность вероятности, установленную выше, где k соответствует $n - 1$. Фишер доказал это в 1925 году.

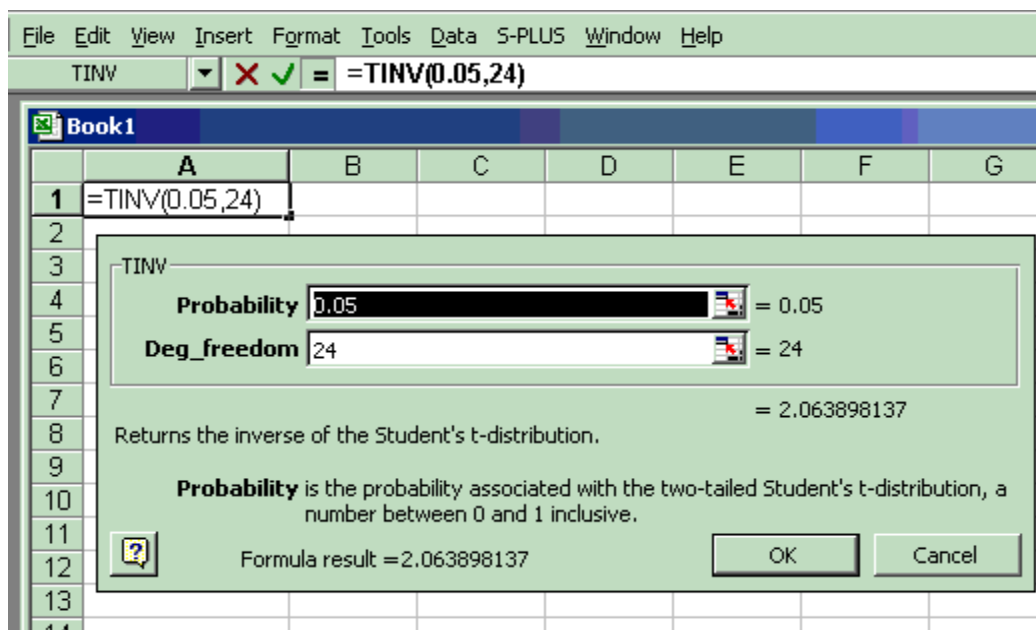
Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$ для доверительной вероятности α (n – количество измерений)

n	α			
	0,68	0,95	0,99	0,999
2	2,0	12,7	63,7	636,6
3	1,4	4,3	9,9	31,6
4	1,3	3,2	5,8	12,9
5	1,2	2,8	4,6	8,6
6	1,2	2,6	4,0	6,9
7	1,1	2,4	3,7	6,0
8	1,1	2,4	3,5	5,4
9	1,1	2,3	3,4	5,0
10	1,1	2,3	3,3	4,8

Коэффициенты Стьюдента на Excel

Коэффициент Студента может быть рассчитан используя программы Excel и Matlab. В Excel есть функция под названием TINV, имеющая два аргумента: “Probability” и “Deg_freedom”. Для вычисления $t(\alpha, n)$ надо запустить функцию TINV и вставить значения $(1-\alpha)$ в окно Probability, и $n-1$ в окно Deg_freedom.

Пример: Найти коэффициент Студента для $n-1=24$ и $\alpha=0.95$. Для этого введите $1-\alpha = 0.05$ в окно «Probability» и 24 в окно «Deg_freedom». $t(\alpha, n) = 2.06$.



Расчет среднего и доверительного интервала

1. Пусть есть n измерений величины x . Тогда среднее значение \bar{x} определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

2. Второй шаг – это расчет стандартного или среднеквадратичного отклонения по формуле:

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

3. Следующий шаг - определение Δx доверительного интервала при выбранной доверительной вероятности α . Коэффициентом Стьюдента $t(\alpha, n)$ определяется из таблицы или вычисляется.

$$\Delta x = t(\alpha, n) \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

Тогда можно сказать, что при выбранной доверительной вероятности (надежности) α , *результат измерения случайной величины x , представляется в виде*

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

Суммарная систематическая погрешность

Суммарная систематическая погрешность в предположении о независимости возникновения её составляющих может быть найдена по формуле

$$S_{\text{сум}} = \sqrt{(s_n)^2 + (\sigma_{\text{приб}})^2}$$

Доверительный интервал для суммарной погрешности равен

$$\Delta_{\text{суг}} = \gamma_{\alpha} S_{\text{сум}}$$

где $\gamma_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ – коэффициент Чебышева, α - доверительная вероятность

Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Пусть исследуемую q величину определяют по результатам прямых измерений других независимых физических величин математическим соотношением

$$q = f(x, y, z)$$

Если известны окончательные результаты прямых измерений,

$$\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y, \bar{z} + \Delta z$$

и предполагается, что величины x, y, z являются случайными и к ним применимо нормальное распределение. Тогда для среднего значения величины q имеем

$$\bar{q} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Для погрешности

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2}$$

Частные производные берутся в точке $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

Следует помнить, что при непосредственных расчетах в формулу необходимо подставлять погрешности $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, найденные для одного и того же значения доверительной вероятности. Погрешность косвенного измерения s также будет соответствовать этому значению доверительной вероятности. Например

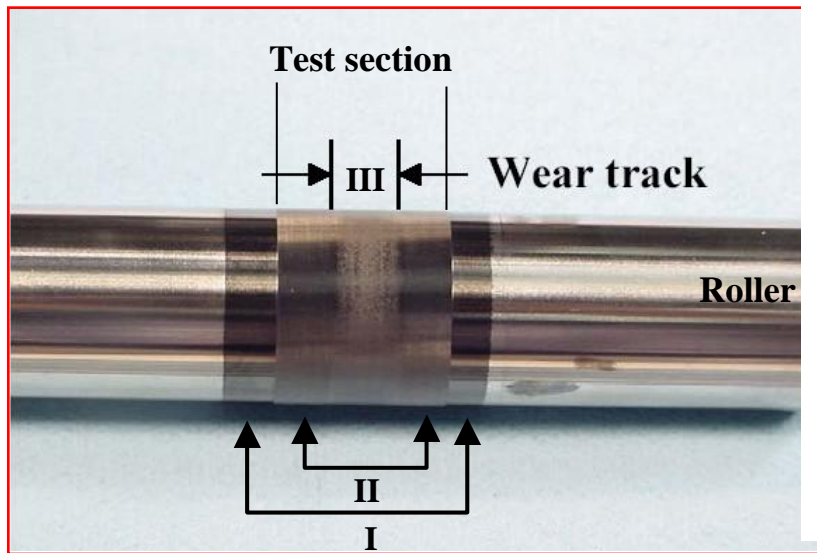
$$q = x \cdot y$$

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

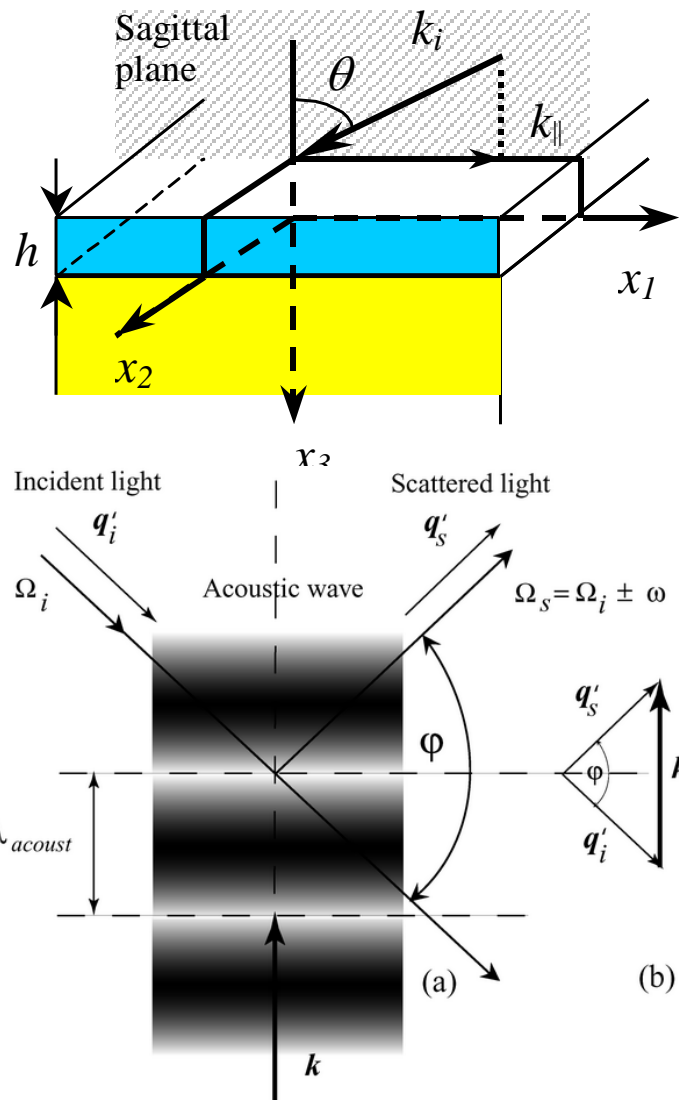
Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Рабочая зависимость	Формула погрешности
$q = Ax + By$	$\Delta q = \sqrt{(A \cdot \Delta x)^2 + (B \cdot \Delta y)^2}$
$q = Ax^{\pm\alpha} y^{\pm\beta}$	$\Delta q / q = \sqrt{(\alpha \cdot \Delta x)^2 + (\beta \cdot \Delta y)^2}$
$q = \ln x$	$\Delta q = \Delta x / x$
$q = e^x$	$\Delta q / q = \Delta x$
$q = A \sin x$	$\Delta q = A \cos x \Delta x$

Пример: определение упругих свойств алмазных пленок

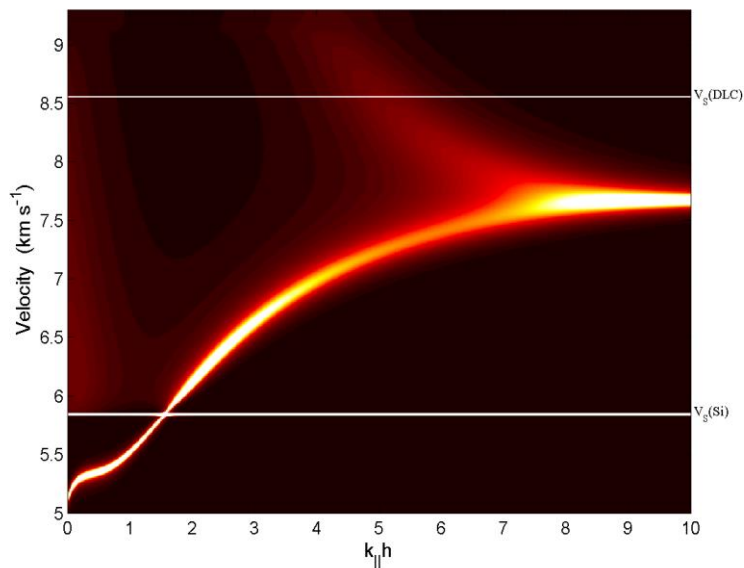


Тестовый образец

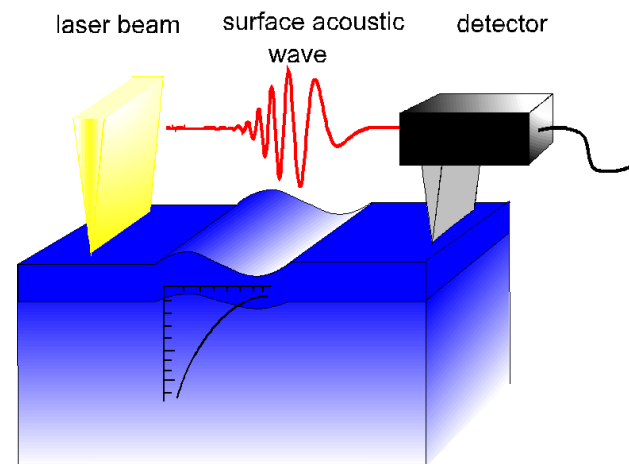


Принципиальная схема взаимодействия тепловых фононов с лазерным лучом. Рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.

Пример по теме: Расчёт относительной погрешности косвенных измерений



Фигура 1. Дисперсия поверхностных акустических волн, рассчитанная для 2.9 μm алмазо-подобной пленки на стали.

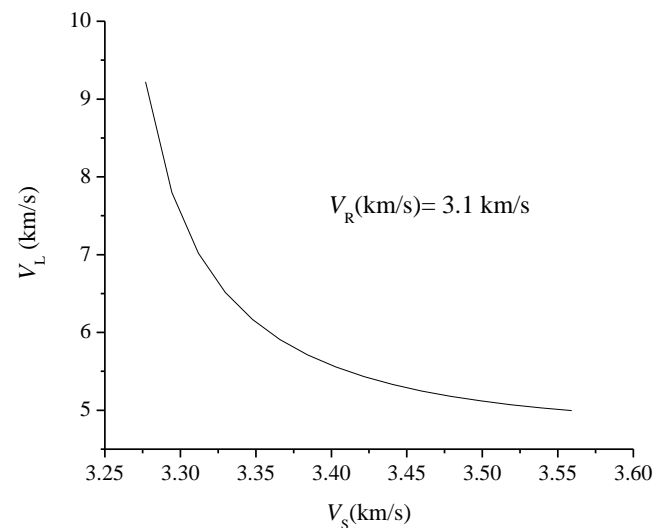
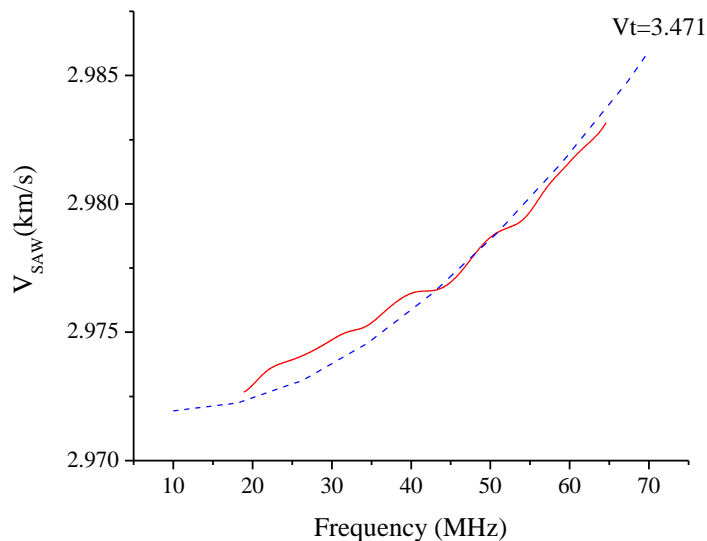


Фигура 2. Смеха измерений поверхностных волн методом лазерного ультразвука (ЛУ).

В тонких пленках упругие свойства можно померить исследуя зависимость скорости поверхностных акустических волн (ПАВ) в таких пленках от частоты или дисперсионные кривые ПАВ. В приведенном примере дисперсионная зависимость измерялась методом ЛУ в интервале $0 < kh < 1$. Метод спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна использовался для измерения скорости Рэлеевской волны, V_R , $kh > 8$.

Пример: определение упругих свойств алмазоподобных пленок

Задача – определить упругие константы алмазоподобных пленок и оценить ошибки их определения из акустических измерений.



Дисперсионная кривая поверхностной акустической волны (SAW) образца с Cr-DLC покрытием. Сплошная линия результат измерения при помощи установки лазерного ультразвука, штриховая линия – получена с помощью метода наименьших квадратов.

Скорость продольной акустической волны V_L Cr-DLC пленки как функция скорости сдвиговой волны V_S при фиксированном значении скорости Рэлеевской волны, $V_R = 3.1$ km/s.

Пример: определение упругих свойств алмазных пленок

Подгонка экспериментальной дисперсионной зависимости скорости поверхностной акустической волны от частоты для следующие значения 3.47 km/s для V_S and 5.21 km/s для V_L . Модуль Юнга и коэффициент Пуассона пленки были рассчитаны с использованием двух скоростей и плотности пленки, измеренному ранее.

$$V_L(V_S) = V_S \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{V_R}{V_S}\right)^2}{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{V_R}{V_S}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_R}{V_S}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{V_R}{V_S}\right)^6}} \quad (1)$$

$$E = \frac{\rho V_S^2 (3V_L^2 - 4V_S^2)}{V_L^2 - V_S^2}, \nu = \frac{(V_L^2 - 2V_S^2)}{2(V_L^2 - V_S^2)} \quad (2)$$

Модуль Юнга пленки составил 68.9 ГПа, а коэффициент Пуассона пленки - 0.1. Необходимо рассчитать относительные погрешность для этих величин. Используя формулу для относительной погрешности:

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\frac{\left(\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}\right)^2}{f(x)}} (\Delta x)^2$$

Пример: определение упругих свойств алмазных пленок

В приведенных экспериментах наибольший вклад в ошибку дают измерения поверхностной Релеевской волны, V_R , методом спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна. Точность измерения поверхностной спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна не может быть лучше, чем 1%. Это ошибка определяет точность метода, предложенного в статье.

Можно использовать уравнение (1) для оценки определения V_L . Вносимой ошибкой определения V_R , которая была измерена методом спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна: $\delta V_L = dV_L/dV_R * \delta V_R|_{V_R=3.1 \text{ km/s}}$. С учетом того, что точность измерений поверхностной спектроскопии Мандельштама — Бриллюэна 1%, i.e., и $dV_L/dV_R = 5.5$, то относительная ошибка определения продольной волны равна $\delta V_L/V_L = 3.3\%$. Аналогично можно оценить ошибки определения модуля Юнга (E) and коэффициента Пуассона (ν). Используя (1) и (2), $dE/dV_R|_{V_R=3.1 \text{ km/s}} = 97$ и $d\nu/dV_R|_{V_R=3.1 \text{ km/s}} = 1.6$, получим 4.4% для модуля Юнга ($\delta E/E$) и 46% для коэффициента Пуассона ($\delta \nu/\nu$).

Домашнее чтение

1. **Ефимова А.И., Зотеев А.В., Склянкин А.А.** *Общий физический практикум физического факультета МГУ. Погрешности эксперимента: Учебно-методическое пособие.* – М.: МГУ, Физический факультет, 2012.
2. **Диденко, Л.Г., Керженцев, В.В.** *Математическая обработка и оформление результатов эксперимента.* Издательство: М. МГУ. 1977 г.
3. **Яворский В. А.** *Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторным работам.* Москва: Московский физико-технический институт (государственный университет). Факультет молекулярной и биологической физики. 2011.
4. **Иверонова В. И.,** *Физический практикум.* Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
5. **Митин И.В., Русаков В.С.** *«Анализ и обработка экспериментальных данных».* Москва 1998

Home work

1. Найти объект для измерения, провести до 10 измерений , найти среднее измеряемой величины, нормальное отклонение, а также доверительный интервал.
2. Написать Matlab или Excell программу расчета среднего значения, нормального отклонения и доверительного интервала для серии измерений .